N° d'ordre 48

Année 1979

THÈSE

présentée à

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

en vue de l'obtention

du Grade de Docteur-Ingénieur
Spécialité : Mécanique des Fluides

par

Ginés MARTINEZ

Ingénieur diplômé de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

---

Caractéristiques dynamiques et thermiques de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire à nombres de Reynolds modéres

soutenue le 20 juin 1979 devant la Commission d'examen

MM. NOUGARO	Professeur à l'INPT	Président
J BOUSQUET	Ingénieur à la SNIAS	Examinateurs
S. GOLDSTEIN	Ingénieur au CEA	
J. GRUAT	Professeur à l'INPT	
H. HA MINH	Chargé de recherche au CNRS	
L. TA PHUOC	Chargé de recherche au CNRS	

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

PRESIDENT D'HONNEUR

M. le Professeur ESCANDE
Membre de l'Institut

PRESIDENT

M. le Professeur MONTEL

VICE-PRESIDENTS

M. MARTY	Professeur
M. ENJALBERT	Professeur sans chaire
M. CONSTANT	Maître de Conférences
M. ANDRE	Maître Assistant

Directeur de l'E.N.S.A.T.	Monsieur le Professeur RAYNAUD
Directeur de l'E.N.S.C.T.	Monsieur le Professeur VOIGT
Directeur de l'E.N.S.E.E.I.H.T.	Monsieur le Professeur NOUGARO
Directeur de l'I.G.C.	Monsieur le Professeur GARDY

SECRETAIRE GENERAL

M. CRAMPÉS

PROFESSEURS HONORAIRES

M. ESCANDE - Membre de l'Institut
M. DIEHL
M. DUPIN

PROFESSEURS

M. ANGELINO	Génie Chimique
M. BUGAREL	Génie Chimique
M. DAT	Mécanique
M. GARDY	Génie Chimique
M. GRUAT	Mécanique
M. HOFFMANN	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. MARTY	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. MONTEL	Chimie Appliquée et Chimie des Matériaux
M. NOUGARO	Mécanique
M. THIRRIOT	Mécanique
M. VOIGT	Chimie Minérale

.../.

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	BERDUCOU	Biologie et Biochimie Appliquées, Sciences Agronomiques
M.	CALMON	Biologie et Biochimie Appliquées, Sciences Agronomiques
M.	DABOSI	Chimie Appliquée et Chimie des Matériaux
M.	ENJALBERT	Génie Chimique
M.	FABRE	Mécanique
M.	FALLOT	Biologie et Biochimie Appliquées, Sciences Agronomiques
M.	GILOT	Chimie Appliquée et Chimie des Matériaux
M.	LEFEUVRE	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	MATHIEU	Chimie Analytique Appliquée et Chimie des Matériaux
M.	TRANNOY	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	TRUCHASSON	Mécanique

MAITRES DE CONFERENCES

M.	ALBERTINI	Sciences Agronomiques
M.	BAJON	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	BAUDRAND	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	BOURGEAT	Minéralogie, Géochimie, Pétrographie et Géologie Appliquée
M.	BRUEL	Informatique fondamentale et appliquée
M.	BUIS	Biologie et Physiologie végétale
M.	CANDAU	Biologie et Biochimie Appliquée, Sciences Agronomiques
M.	CONSTANT	Chimie minérale
M.	COSTES	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	COUDERC	Génie Chimique
M.	ECOCHARD	Biologie et Biochimie Appliquée, Sciences Agronomiques
M.	FOCH	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	GASET	Chimie Organique Appliquée et Chimie des Matériaux
M.	GOURDENNE	Chimie Physique
M.	LABAT	Biologie et Biochimie Appliquée, Sciences Agronomiques
M.	LENZI	Chimie APpliquée et Chimie des Matériaux
M.	MASBERNAT	Mécanique
M.	MATHEAU	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	MORELIERE	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	TERRON	Zoologie et Ecologie

Liste établie le 24 janvier 1979

UNIV. LEIDEN BIBL.

AVANT - PROPOS

Les travaux présentés ici, ont été effectués au sein de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, sous la direction de Monsieur le Professeur J. NOUGARO, Lauréat de l'Institut, Directeur de l'ENSEEIHT. L'intérêt qu'il a accordé à notre travail a été pour nous d'un grand réconfort ; qu'il nous soit permis de lui exprimer ici nos sincères remerciements et notre profonde gratitude pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant la présidence du jury.

La présence à ce jury de Monsieur TA PHUOC LOC, Chargé de Recherche au CNRS est pour moi d'une inestimable valeur ; qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Nous tenons à remercier Monsieur J. BOUSQUET, Ingénieur de Recherche à la SNIAS d'avoir accepté de faire partie des membres du jury.

Monsieur S. GOLDSTEIN, Ingénieur de Recherche au CEA, a accepté aimablement de participer au jury. Nous l'en remercions sincèrement.

Nous remercions vivement Monsieur J. GRUAT, Professeur à l'INPT d'avoir si aimablement accepté, malgré ses nombreuses occupations, de faire partie du jury.

Notre directeur de recherches, Monsieur HA MINH, Chargé de Recherche au CNRS, nous a prodigué tout au long de ce travail ses conseils éclairés. Sa grande compétence scientifique en la matière et sa disponibilité sans réserve nous ont permis de mener à bien cette étude. Nous tenons à

lui exprimer vivement notre profonde gratitude et lui adressons nos remerciements les plus cordiaux.

Nous remercions sincèrement Monsieur P. CHASSAING, Maître Assistant à l'INPT qui a toujours montré un grand intérêt pour notre travail. Ses conseils judicieux ont été pour nous un apport scientifique fructueux. Qu'il soit persuadé de notre profonde reconnaissance et de notre sincère amitié.

Que Monsieur H. BOISSON, Attaché de Recherche au CNRS trouve ici notre profonde reconnaissance. Son étroite collaboration et ses conseils judicieux tout au long de cette étude ont été pour nous très enrichissants. Nous le remercions vivement et l'assurons de notre gratitude et de notre profonde amitié.

Monsieur J. BONNEFONT, Mademoiselle P. HERAULT et Monsieur J.C. PONS ont très aimablement contribué à la réalisation expérimentale de cette étude et à la mise en forme d'une partie des résultats. Nous tenons à les remercier chaleureusement de leur compétence et de leur dévouement.

Nous remercions également Messieurs C. JEAN, responsable du service de Calcul Numérique, G. DOURNES et G. LEBLANC, techniciens de ce service, pour l'aide qu'ils nous ont apportée.

Monsieur SUZANNE, Assistant à l'INPT et Monsieur P. DELMAS, Technicien, nous ont à titres divers apporté leur aide dans la partie expérimentale. Nous les remercions très sincèrement.

Enfin, les qualités professionnelles de Mme BARRAU, Mme CAUGNE et M. BIOULES sont illustrées dans la présentation définitive de ce travail. Nous les remercions vivement.

o

o o

SOMMAIRE

Pages

AVANT-PROPOS

PRINCIPALES NOTATIONS 3

INTRODUCTION 9

CHAPITRE I : ETUDE THEORIQUE - EQUATIONS GENERALES 15

I. Introduction 15
II. Equations générales 15

II.1. Ecriture dimensionnelle 15
II.2. Etude adimensionnelle 17

III. Formes particulières des équations 20
IV. Transformation des variables d'espace 21

IV.1. Coordonnées polaires 21
IV.2. Coordonnées logarithmiques. Polaires 22

V. Conclusion 23

CHAPITRE II : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE 27

I. Introduction 27
II. Différents régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds 28

II.1. Ecoulement de fluide rampant 29

II.1.1. Description qualitative 29
II.1.2. Approche mathématique 30

II.2. Régime laminaire stationnaire décollé 32
II.3. Régime laminaire décollé instationnaire avec allées tourbillonnaires 32
II.4. Régime subcritique et supercritique 37

III. Transfert thermique autour d'un cylindre chauffé 41

III.1. Transfert de chaleur à faible nombre de Reynolds 42
III.2. Régime de convection forcée à des nombres de Reynolds modérés 44

CHAPITRE III : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE - RESOLUTION NUMERIQUE 49

I. Introduction 49
II. Ordre de précision. Stabilité des schémas 51
III. Revue des travaux récents de simulation de l'écoulement laminaire autour d'un cylindre 53

III.1. Equations stationnaires 54
III.2. Equations instationnaires 55

CHAPITRE IV : ETUDE NUMERIQUE 59

I. Introduction 59
II. Equation de continuité 61

II.1. Méthode implicite à directions alternées optimisée (A.D.I.o) 62

II.1.1. Principe de la méthode 62
II.1.2. Procédure optimisée du schéma implicite à directions alternées (Wachspress 1964) Paramètres optimaux 65

II.2. Méthode de transformation rapide de Fourier mixte (F.F.T.m) 67
II.3. Etude comparative des performances des codes de calcul (A.D.I.o) (F.F.T.m) 69

II.3.1. Premier test : écoulement irrotationnel autour d'un cylindre circulaire 69
II.3.2. Deuxième test 72

III. Equations de transport du tourbillon et de la température 73

III.1. Découplage numérique des fonctions courant et tourbillon 73
III.2. Résolution de l'équation de transport du tourbillon 73

III.2.1. Discrétisation spatiale 74
III.2.2. Précision temporelle 77

III.3. Conditions aux limites pour la fonction rotationnel 77
III.4. Equation de la température 79

III.4.1. Conditions aux limites 79

IV. Schéma de l'algorithme de calcul du système différentiel 82
V. Exemple des performances de l'algorithme complet de calcul 84

CHAPITRE V : ECOULEMENT SYMETRIQUE 91

I. Intérêt de l'étude 91
II. Etude des paramètres de discrétisation numérique 91

II.1. Pas de temps 91
II.2. Discrétisation spatiale 94
II.3. Influence de la localisation de la frontière extérieure numérique 94

III. Résultats sur le champ dynamique 95

III.1. Evolution du régime transitoire en fonction du temps 95
III.2. Valeurs ponctuelles 99
III.3. Paramètres globaux 107
III.4. Visualisation numérique de l'écoulement 107
III.5. Ecoulement initial à nombre de Reynolds élevé 117
III.6. Conclusion 129

IV. Champ thermique. Transfert de chaleur 133

IV.1. Remarque : résolution du champ de température 141
IV.2. Nombre de Nusselt local 141
IV.3. Nombre de Nusselt moyen 141

CHAPITRE VI : ECOULEMENT AVEC ALLEES TOURBILLONNAIRES 151

I. Rappels 151
II. Nature des perturbations numériques 151

II.1. Premier type de perturbation 152
II.2. Deuxième type de perturbation 153
II.3. Application au régime Re = 100 154
II.4. Remarques 156

III. Détermination du seuil d'apparition du régime d'écoulement avec allées tourbillonnaires en fonction du nombre de Reynolds 165
IV. Caractéristiques dynamiques de l'écoulement 171

IV.1. Forces induites sur l'obstacle 199
IV.2. Champ de vitesses 199
IV.3. Comparaison de la fréquence de Strouhal numérique avec les résultats expérimentaux 205

V. Etude du champ thermique 209

V.1. Etude du transfert thermique, nombre de Nusselt local et moyen 209

VI. Conclusion 233

CHAPITRE VII : VISUALISATION DU CHAMP THERMIQUE 239

I. Intérêt de l'étude 239
II. Description du montage expérimental 239
III. Principe de l'interférométrie différentielle 245

III.1. Introduction 245
III.2. Rappels d'optique 246
III.3. Interféromètre différentiel Huet-Onera 247
III.4. Dépouillements quantiatifs des clichés photographiques pour les phénomènes bidimensionnels 252
III.5. Application à l'étude du transfert de chaleur dans un gaz en écoulement bidimensionnel 253

IV. Visualisation du champ thermique autour d'un cylindre circulaire en convection forcée 254

IV.1. Conditions d'expérience 254
IV.2. Résultats 256

IV.2.1. Disparités entre le modèle expérimental et le modèle numérique 256
IV.2.2. Limites de l'interférométrie interférentielle 258

V. Conclusion 259

CONCLUSIONS GENERALES 273

ANNEXES 277

Annexe 1 : Résolution de systèmes tridiagonaux par factorisation de matrices 279
Annexe 2 : Détermination des efforts sur le cylindre 283
Annexe 3 : Détermination du tourbillon à la paroi. Formule de Wood 285

BIBLIOGRAPHIE 289

PRINCIPALES NOTATIONS

PRINCIPALES NOTATIONS

COORDONNEES

t	Temps
x_i	Coordonnées cartésiennes
r	Coordonnée radiale
θ'	Coordonnée angulaire
Z	Coordonnée radiale transformée : $Z = 1/a.\log r$
θ	Coordonnée angulaire transformée : $\theta = 1/a.\theta'$
a	Constante de la transformation : $(r,\theta') \downarrow (Z,\theta)$
r_o	Rayon du cylindre
H	Longueur du cylindre (expérimental)
$2r_o/H$	Allongement du cylindre

GRANDEURS CINEMATIQUES

$\vec{V}$	Vecteur vitesse
u_i	i = 1,2,3 composante de la vitesse dans une base cartésienne
u_r	Composante radiale de la vitesse
u_θ	Composante angulaire de la vitesse
ψ	Fonction courant
ω	Fonction rotationnel

PROPRIETES PHYSIQUES ET GRANDEURS THERMODYNAMIQUES

ρ	Masse volumique
λ	Conductivité thermique
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
$\mathcal{D}$	Coefficient de diffusion d'une grandeur physique quelconque
C_p	Chaleur massique à pression constante
C_v	Chaleur massique à volume constant

γ	Rapport de chaleur massique : C_p/C_v
T	Température
e	Energie interne spécifique
h	Enthalpie spécifique
s	Entropie spécifique
β	Coefficient de dilatation linéaire à pression constante
R	Constante de gaz parfaits

GRANDEURS DYNAMIQUES

g	Accélération de la pesanteur
σ_{ij}	Tenseur des contraintes
P	Pression
Φ	Fonction de dissipation de Rayleigh

OPERATEURS MATHEMATIQUES

D/Dt	Dérivée particulaire : $\partial/\partial t + u_i \partial/\partial x_i$ (sommation d'Einstein)
Δ	Laplacien : $\partial^2/\partial x_i \partial x_i$
$\delta_{i,j}$	Symbole de Kronecker : $1 (i=j)$; $0 (i \neq j)$
$\mathcal{O}$	Ordre de grandeur

INDICES

Supérieur

Φ^n, Φ^k	Repère le temps ($t=n\delta t$) ou l'itération interne

Inférieurs

$\Phi_{i,j}$	Valeur relative au point du maillage P(i,j). Parfois cette notation est abrégée par $\Phi(N)$, $\Phi(S)$, $\Phi(E)$, $\Phi(O)$ qui repèrent les noeuds voisins au point P par analogie aux points cardinaux.
ϕ_∞	Quantité prise à l'état de référence à l'amont lointain
ϕ_p, Φ_p	Quantité relative à la paroi du cylindre
$\Phi(P)$	Solution approchée de la grandeur ϕ au point P
$\Phi_e(P)$	Solution exacte de la grandeur ϕ au point P

PARAMETRES ADIMENSIONNELS

Re	Nombre de Reynolds : $U_\infty r_o/\nu_\infty$
Pr	Nombre de Prandtl : $Cp\mu_\infty/\lambda_\infty$
Gr	Nombre de Grashof : $\rho_\infty^2 g\beta(2r_o)^3\Delta T/\mu_\infty^2$
M	Nombre de Mach : $U_\infty/C_\infty = U_\infty/[(\gamma-1)CpT_\infty]^{1/2}$
Pe	Nombre de Péclet : $Pr.Re$
St	Nombre de Strouhal : $fU/2r_o$ où f est la fréquence des tourbillons

COEFFICIENTS ADIMENSIONNELS

Cx_p	Coefficient de traînée de pression
Cx_v	Coefficient de traînée visqueuse
Cx	Coefficient de traînée totale : $Cx_p + Cx_v$
Cy	Coefficient de portance
Nu	Nombre de Nusselt local
$\overline{Nu}$	Nombre de Nusselt moyen

PARAMETRES DE DISCRETISATION

$\delta\theta$	Pas spatial suivant la direction θ
δZ	Pas spatial suivant la direction Z
h	Pas spatial si $\delta\theta = \delta Z$
δt	Pas de temps
R_∞	Rayon à la frontière extérieure

NOTATION D'OPTIQUE

θ_x, θ_y	Déviation angulaire suivant $\vec{x}$, $\vec{y}$
χ	Dédoublement linéaire
2ε	Dédoublement angulaire
$\Delta\delta$	Variation de différence de marche
n	Indice de réfraction d'un gaz

DIVERS

$\omega_{k,h}$, $\omega_{k,v}$	Paramètres optimums itératifs pour le schéma A.D.I. optimisé
θ_d	Angle de décollement
L/r_o	Longueur de recollement

ABREVIATIONS

S.D.F.	Schéma aux différences finies
A.D.I.	Méthode implicite aux directions alternées
A.D.I.o.	Méthode implicite aux directions alternées optimisée
F.F.T.	Transformation rapide de Fourier
F.F.T.m.	Méthode de transformation de Fourier mixte

INTRODUCTION

INTRODUCTION

A la lecture du titre de ce mémoire, on serait tenté de s'écrier : encore une étude sur le cylindre !

La remarque est certes pertinente pour qui connaît le grand nombre de travaux consacrés à cet écoulement. Il est donc nécessaire de nous expliquer sur ce point en précisant tout de suite les contours de notre contribution.

L'écoulement autour d'un cylindre est un des fameux problèmes types de la Mécanique des Fluides où se retrouve une multitude de phénomènes à éclaircir. Devant ce véritable défi de la nature, chaque chercheur ne peut qu'apporter une contribution, forcément partielle, à cet ensemble "multifacettes", ainsi que le désignait MORKOVIN lors du symposium de 1964 sur les écoulements décollés:"Flow around circular cylinder : a kaleidoscope of challenging fluid phenomena".

Il serait présomptueux de notre part, de prétendre relever, dans le cadre modeste d'une thèse de Docteur-Ingénieur, un tel défi. A l'analyse cependant, certains aspects sont apparus relativement en retrait, et c'est vers eux que nous nous sommes naturellement tournés.

Le premier point que nous avons ainsi abordé, concerne le champ thermique pour un écoulement symétrique comme pour un écoulement instationnaire avec allée tourbillonnaire. En effet, si depuis quelques années, le problème dynamique instationnaire a fait l'objet d'un nombre croissant de travaux, notamment sur le plan numérique, il n'existe, à notre connaissance, que deux publications traitant du problème thermique, bien que les applications en ce domaine soient pourtant nombreuses. D'un point de vue fondamental, il est également intéressant d'étudier le parallélisme entre le transport du tourbillon et de la température, les procédures de marquage thermique étant largement répandues, alors

que les conditions aux limites imposées à ces deux fonctions sont très différentes.

Un deuxième centre d'intérêt réside dans l'étude de la phase transitoire de l'écoulement par voie numérique. En effet, le calcul s'avère, dans ce cas, un outil d'analyse, au sens de la Mécanique des Fluides, des différents mécanismes grâce auxquels s'instaure le régime périodique des allées tourbillonnaires (naissance des tourbillons - convection - diffusion). Une telle approche se révèle extrêmement délicate par voie expérimentale.

Si la configuration cylindrique circulaire a été adoptée ici pour des raisons de commodité (maillage - existence d'un grand nombre de résultats expérimentaux) il ne faut pas oublier que le sillage généré par un obstacle quelconque possède des caractéristiques de plus en plus indépendantes de ce dernier lorsqu'on s'en éloigne vers l'aval. L'étude détaillée des grosses structures de ce sillage voit donc son intérêt s'étendre vers d'autres géométries d'obstacles.

Enfin, la limitation de l'étude à un régime laminaire ne va nullement à l'encontre de l'axe de recherche de l'équipe au sein de laquelle ce travail fut exécuté, et qui est relatif aux écoulements turbulents. En effet pour un écoulement autour du cylindre à grands nombres de Reynolds, on retrouve les mêmes mécanismes fondamentaux : formation des tourbillons - convection - diffusion - destruction, avec une complexité supplémentaire due à la turbulence, si l'on convient de schématiser cet effet de turbulence par une viscosité effective, variable dans le domaine. L'étude en régime laminaire apparaît comme un jalon indispensable à toute approche en régime turbulent tenant compte du comportement organisé des structures cohérentes.

Les travaux consignés dans ce mémoire sont regroupés en sept chapitres. Après le rappel des équations à traiter (chapitre I) une synthèse bibliographique est faite, aussi bien sur les propriétés de l'écoulement autour du cylindre (chapitre II) que sur les méthodes de résolution (chapitre III).

Le chapitre IV est consacré à la mise au point de l'outil numérique dont les performances sont testées au chapitre V.

Les problèmes dynamiques et thermiques en régime instationnaire sont analysés et discutés dans le chapitre VI, le chapitre VII étant réservé à l'exposé de notre contribution expérimentale et précédant la conclusion générale de notre étude.

CHAPITRE I

ETUDE THEORIQUE : EQUATIONS GENERALES

CHAPITRE I

ETUDE THEORIQUE : EQUATIONS GENERALES

I. INTRODUCTION

Reprenant les équations générales du mouvement d'un fluide homogène avec transfert de chaleur (MONIN et YAGLOM), (CURLE et DAVIES), nous allons par une étude adimensionnelle justifier les simplifications spécifiques à notre problème. Les équations seront dans un premier temps écrites en coordonnées cartésiennes et adaptées par la suite à la configuration géométrique particulière de l'écoulement.

II. EQUATIONS GENERALES

II.1. ECRITURE DIMENSIONNELLE

Equation de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_K)}{\partial x_K} = 0 \qquad (1)$$

Equations de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{D}{Dt}(\rho u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(-P - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_K}{\partial x_K}\right)\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] - \rho g \delta_{2i} \qquad (2)$$

Equation de l'énergie :

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left[-\frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_K}{\partial x_K}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_K}\left(\lambda \frac{T}{\partial x_K}\right) \qquad (3)$$

avec : i, j, k = 1, 2, 3 ; les forces extérieures (ρg) sont parallèles aux deuxième axe.

Les équations (1), (2), (3) sont relatives à un fluide homogène quelconque pour lequel le tenseur des contraintes et le flux de chaleur obéissent respectivement à la loi de Newton et de Fourier. En présence d'un flux radiatif, un terme source vient s'ajouter au second membre de l'équation de l'énergie.

Le système à cinq équations ainsi défini est fermé si nous exprimons l'entropie s (ou l'énergie interne e ou encore l'enthalpie h) à l'aide des relations thermodynamiques suivantes :

$$C_p - C_v = T\beta^2 / \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T$$

où : C_p : chaleur spécifique à pression constante

C_v : chaleur spécifique à volume constant

β : coefficient d'expansion à pression constante

$$\beta = - 1/\rho . \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P$$

$$\rho = \rho(P,T)$$

Pour un gaz parfait, ces relations s'expriment par :

$$C_p - C_v = R$$

$$P = \rho R T$$

$$s = - R \, Lg \, \rho + C_p \, Lg \, T + cte$$

Ainsi, l'équation de l'énergie se transforme :

$$C_p \rho \frac{DT}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \Phi \qquad (4)$$

où $\Phi = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ est la fonction de dissipation de Rayleigh qui rend compte des dissipations visqueuses irréversibles.

Pour un liquide, l'équation d'état peut être :

$$\rho(T) = \rho(T_o) - \beta\, \rho_o (T - T_o)$$

alors l'équation de l'énergie (3) devient :

$$\rho\, C_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \Phi \qquad (5)$$

Remarque : Pour un gaz parfait, $\beta = 1/T$ et l'équation (4) se déduit directement de l'équation (5).

II.2. ETUDE ADIMENSIONNELLE

Nous nous intéressons à l'écoulement autour d'un cylindre infiniment long de rayon r_o. L'état de référence du fluide est pris à l'amont lointain (référence à l'infini : "∞"). Ainsi nous introduisons les quantités adimensionnelles suivantes :

$$\tilde{x}_i = x_i/r_o \quad ; \quad \tilde{u}_i = u_i/U_\infty \quad ; \quad \tilde{t} = t.U_\infty/r_o \quad ; \quad \tilde{P} = \frac{P-P_\infty}{\rho_\infty U^2_\infty}$$

$$\tilde{T} = T/T_\infty \quad ; \quad \tilde{\rho} = \rho/\rho_\infty \quad ; \quad \tilde{\lambda} = \lambda/\lambda_\infty \quad ; \quad \tilde{\mu} = \mu/\mu_\infty$$

A l'aide des nombres suivants :

. Nombre de Reynolds : $Re_\infty = \dfrac{\rho_\infty U_\infty . 2r_o}{\mu_\infty}$

. Nombre de Prandtl : $Pr_\infty = \dfrac{C_p \mu_\infty}{\lambda_\infty}$

. Nombre de Mach : $M_\infty = \dfrac{U_\infty}{C_\infty} = \dfrac{U_\infty}{[(\gamma-1) C_p T_\infty]^{1/2}}$

. Nombre de Grasholf : $G_\infty = \dfrac{\rho^2_\infty g \beta (2r_o)^3 (T_p - T_\infty)}{\mu^2_\infty}$

l'équation de l'énergie prend la forme :

$$\tilde{\rho}\frac{\tilde{DT}}{\tilde{Dt}} = (\gamma-1)M^2_\infty\left[\frac{\tilde{DP}}{\tilde{Dt}} + \frac{2}{Re}\tilde{\mu}\tilde{\Phi}\right] + \frac{2}{Pr_\infty Re_\infty}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_i}\left(\tilde{\lambda}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_i}\right) \qquad (6)$$

1°) Hypothèse fondamentale : Par la suite, seul l'écoulement laminaire à faible nombre de Mach ($M_\infty << 1$) est traité.

L'équation de l'énergie se réduit à un bilan de type : convection-diffusion

2°) Hypothèse fondamentale : Les écarts de température présents dans l'écoulement $[\theta(T_p - T_\infty)]$ sont faibles, les propriétés physiques μ, λ, ρ restent constantes en première approximation, seule la dilatation du fluide due aux variations de température est prise en compte à travers un terme source dans les équations du mouvement (poussée d'Archimède). Ainsi, l'équation de l'énergie se simplifie :

$$\frac{\tilde{DT}}{\tilde{Dt}} = \frac{2}{Pr_\infty Re_\infty}\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial\tilde{x}_i^2}$$

Il est commode pour la suite de rendre la température adimensionnelle par rapport à la différence : $\Delta T = T_p - T_\infty$, soit :

$$\tilde{T} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}$$

Alors les équations (1), (2), relatives à un fluide incompressible s'écrivent :

$$\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial\tilde{x}_i} = 0$$

$$\frac{\tilde{Du}_i}{\tilde{Dt}} = -\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\tilde{x}_i} + \frac{2}{Re_\infty}\frac{\partial^2 u_i}{\partial\tilde{x}_i^2} - \delta_{i2}\frac{G}{Re_\infty^2}\tilde{T}$$

3°) Hypothèse fondamentale : La configuration de l'écoulement est telle que le nombre de Grashof est très faible vis à vis du nombre de Reynolds (convection forcée).

En conséquence la référence à l'amont lointain n'est plus justifiée pour les nombres adimensionnels.

Le régime d'écoulement défini par les hypothèses 1°, 2°, 3° est régi par les équations :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \tag{8}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\lambda}{\rho C_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \tag{9}$$

Avec les variables adimensionnelles :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0 \tag{7'}$$

$$\frac{D\tilde{u}_i}{D\tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{2}{Re}\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_i^2} \tag{8'}$$

$$\frac{D\tilde{T}}{D\tilde{t}} = \frac{2}{Pr.Re}\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_i^2} \tag{9'}$$

Ainsi l'écoulement transversal autour d'un cylindre infiniment long en régime laminaire bidimensionnel (i = 1, 2) est régi par un système à quatre équations du second ordre, dont deux (équations du mouvement) sont non-linéaires ; les termes de convection (présents dans les dérivées particulaires D/Dt) contenant les non-linéarités.

Les solutions des équations (7'), (8') et (9'), pour des conditions initiales et aux limites fixées, sont de la forme :

$$\tilde{u}_i = F_i(\tilde{x}_i, Re)$$

$$\tilde{P} = G(\tilde{x}_i, Re) \qquad i = 1, 2$$

$$\tilde{T} = H(\tilde{x}_i, Re, Pr)$$

III. FORMES PARTICULIERES DES EQUATIONS

Le traitement de l'écoulement bidimensionnel peut se trouver simplifié avec l'utilisation des variables de Helmholtz (fonction courant ψ, rotationnel ω) reliées aux variables hydrodynamiques par les relations :

$$u_1 = - \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$$

$$u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

$$\vec{\omega} = \vec{rot}\ \vec{V}$$

Il est à noter qu'en écoulement bidimensionnel, le rotationnel se réduit à une seule composante portée par l'axe $\vec{x}_3$ et est donc parfaitement défini par le scalaire (ω).

Lorsqu'on applique l'opérateur $\vec{rot}$ aux équations (8), il vient :

$$\frac{D}{Dt}(\psi,\omega) = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i^{\,2}} \qquad i = 1, 2 \qquad (10)$$

où $$\frac{D}{Dt}(\psi,\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\frac{\partial \omega}{\partial x_2}$$

Le scalaire ω et la fonction courant ψ (qui satisfait identiquement l'équation de la conservation de la masse (7)), sont reliés par :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_i} = \omega \qquad (11)$$

La pression n'est donc plus nécessaire pour déterminer le champ de vitesses. La résolution du problème dynamique dans cette formulation comporte seulement deux équations : l'équation de transport du rotationnel ω (10) et l'équation de continuité (11) qui est une équation de Poisson.

Le champ de pression peut être déterminé à partir de l'équation :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = 2\rho\left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}\right] \qquad (12)$$

L'ordre du système différentiel (10), (11) peut encore être réduit lorsqu'on utilise la relation (11) dans l'équation (10). Il vient ainsi une équation différentielle du quatrième ordre. Soit en utilisant la notation du Laplacien : Δ

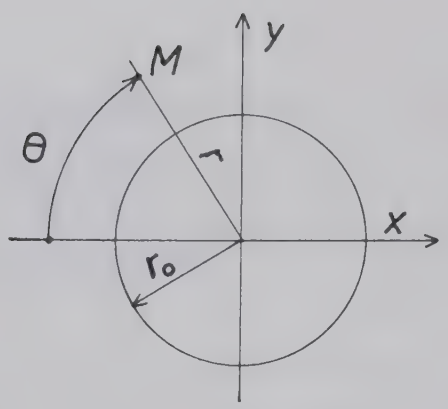
$$-\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta\psi) + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}(\Delta\psi) = \nu\,\Delta(\Delta\psi) \qquad (13)$$

Remarque : Par la suite, nous utiliserons exclusivement les variables adimensionnelles. Nous omettrons pour des raisons de commodité la tilde.

IV. TRANSFORMATION DES VARIABLES D'ESPACE

IV.1. COORDONNEES POLAIRES

La géométrie circulaire fait qu'il est plus commode pour de multiples raisons (en particulier pour le traitement numérique des conditions aux limites) d'utiliser les coordonnées polaires.



Nous définissons la fonction courant ψ dans le système (r,θ') par :

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta'}$$

$$u_{\theta'} = \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

L'équation de transport d'un scalaire $\phi(r,\theta')$ s'écrit :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta'}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta'} = \frac{2}{Pe}\Delta_{(r,\theta')}\phi \qquad (14)$$

où $Pe = Re$ si $\phi = \omega$

$Pe = Pr.Re$ si $\phi = T$

et $$\Delta_{(r,\theta')} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta'^2}$$

IV.2. COORDONNEES LOGARITHMIQUES - POLAIRES

L'utilisation de la transformation :

$$r = e^{aZ}$$

$$a = cte$$

$$\theta' = a\theta$$

permet de simplifier les équations (14) /HA MINH 1977a/ et d'utiliser un maillage régulier lors du traitement numérique des équations.

Les équations (11) et (14) deviennent respectivement :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = E_z\,\omega \tag{15}$$

$$E_z\frac{\partial\omega}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\omega}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial\theta} = \frac{2}{Re}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right) \tag{16}$$

$$E_z\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial\theta} = \frac{2}{Pr.Re}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\right) \tag{17}$$

$$E_z = a^2 e^{2aZ}$$

Le champ de vitesse (u_r, u_θ) est déterminé par :

$$u_r = -E_z^{-1/2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad ; \quad u_\theta = E^{-1/2}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

V. CONCLUSION

L'écoulement laminaire bidimensionnel autour d'un cylindre circulaire en régime instationnaire faiblement chauffé et à faible nombre de Mach ($M << 1$) est régi par un système d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre non linéaire de rang trois : ψ, ω, T. Il comprend une équation de Poisson pour l'équation de continuité (15) et deux équations convection-diffusion pour le rotationnel ω et la température T.

Pour définir la solution du problème nous devons définir les conditions initiales et aux limites. Cette question sera abordée au chapitre IV.

CHAPITRE II

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE II

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Cette revue bibliographique ne prétend pas être exhaustive, le sujet abordé ayant fait l'objet de très nombreuses études depuis un siècle. Le lecteur pourra consulter également des études de ROSHKO (1954), MARRIS (1964), MORKOVIN (1964), COUTANCEAU et al (1977). Nous nous limiterons pour notre part, à rappeler brièvement les différentes propriétés de chaque régime d'écoulement.

I. INTRODUCTION

Depuis plus de cent ans déjà, l'écoulement transversal autour d'un cylindre circulaire a fait l'objet de très nombreuses études. Si des études théoriques furent développées à la suite des travaux de Stokes et d'Oseen pour des écoulements à très faibles nombres de Reynolds, les expérimentateurs d'intéressèrent également à cet écoulement pour déterminer les lois de refroidissement du cylindre chauffé (WEBER, 1894). La connaissance des lois de refroidissement était d'un grand intérêt pour le développement des techniques de thermo-anémométrie.

La connaissance du système des forces induites au cylindre par l'écoulement instationnaire (SONNEVILLE, 1976 ; SCHMITT, 1977) présente un intérêt dans de nombreux domaines. En effet la forme cylindrique est très répandue : urbanisme, aérodynamisme, structures mécaniques. Le récent développement des plateformes d'exploitation pétrolière en mer (structures tubulaires) exige pour leur calcul, la connaissance de ces forces. La découverte récente d'allées tourbillonnaires dans l'atmosphère, à proximité de certaines îles, par les observations météorologiques (BERGER et al, 1972) a relancé les recherches sur les sillages tourbillonnaires.

D'un point de vue plus fondamental, de très nombreuses études sur les écoulements cisaillés ont montré l'existence de structures cohérentes dont l'organisation ne peut pas être prise en compte par des modèles de turbulence basés sur une analyse purement statistique. Une meilleure approche de ces écoulements devrait résulter de l'élaboration de modèles turbulents qui incluent ces mécanismes.

II. DIFFERENTS REGIMES D'ECOULEMENT EN FONCTION DU NOMBRE DE REYNOLDS

Le régime dynamique de l'écoulement d'un fluide incompressible autour d'un cylindre circulaire de rayon r_o, placé dans un écoulement uniforme de vitesse U_∞ est défini par le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{U_\infty . 2r_o}{\nu}$$

Aux très faibles nombres de Reynolds, l'écoulement est rampant ($Re < 1$; figure 1a).

Lorsque $Re \simeq 5$, l'écoulement décolle à l'arrière de l'obstacle, deux tourbillons symétriques se développent (figure 1b).

Dès que le nombre de Reynolds atteint 40, le sillage oscille. Un régime d'allées tourbillonnaires s'instaure, l'écoulement demeurant entièrement laminaire jusqu'à $Re = 160 - 200$.

Au-delà, le mécanisme de production et de détachement des tourbillons se poursuit mais la couche limite cisaillée présente un caractère turbulent qui va en s'amplifiant dans le sillage.

Lorsque le nombre de Reynolds est de l'ordre de 4.10^5, la couche limite devient entièrement turbulente.

La localisation des divers régimes est sensible aux conditions expérimentales, essentiellement au coefficient de blocage, au caractère bidimensionnel lié à l'allongement du cylindre (FARGUES, 1976), au

niveau de turbulence de l'écoulement amont (TRITTON, 1971; GASTER, 1971 ; BERGER, 1972) et éventuellement à la présence d'excitations externes vibratoiresou acoustiques.

En dehors du mouvement en fluide rampant, aucun traitement analytique complet n'existe pour les autres régimes d'écoulement.

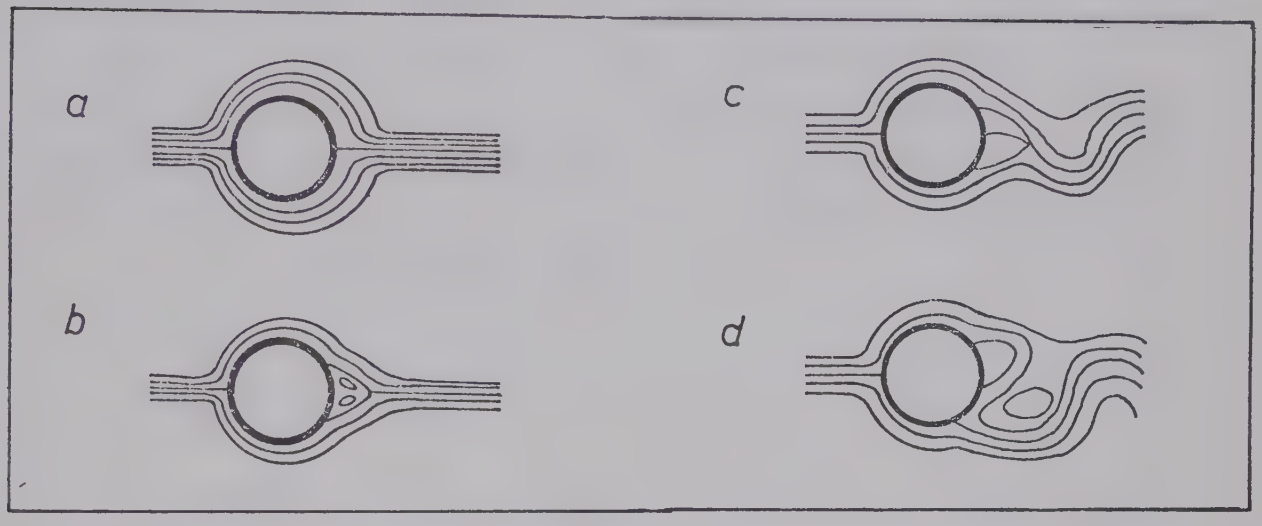


Figure 1 : Allure des lignes de courant de l'écoulement laminaire autour du cylindre à différents nombres de Reynolds.

II.1. ECOULEMENT DE FLUIDE RAMPANT

II.1.1. Description qualitative

Les lignes de courant épousent la forme de l'obstacle. Le régime est essentiellement visqueux. Cependant dès qu'on s'éloigne de l'obstacle, les forces d'inertie ont un rôle non négligeable, et les ignorer dans un traitement mathématique conduit à une impossibilité, connue sous le nom de paradoxe de Stokes.

Il est donc nécessaire de tenir compte, au moins loin de l'obstacle, à la fois des forces d'inertie et de viscosité ainsi que l'ont démontré par des méthodes de développements asymptotiques raccordés, de nombreux auteurs dont KAPLAN, PEARSON, PRUDHOM et VAN DYKE.

Sur le plan pratique, on rencontre ce régime dans la zone proche d'une sonde d'anémométrie à fil chaud placée dans un écoulement à faible vitesse.

II.1.2. Approche mathématique

Le cas limite $Re = 0$ détermine la solution au premier ordre définie par (chapitre I) :

$$\Lambda^2_{r,\theta}\ \psi = 0$$

avec les conditions aux limites :

- Condition d'adhérence à la paroi :

$$\psi(1,\theta) = \frac{\partial \psi}{\partial r}(1,\theta) = 0$$

- Condition d'écoulement uniforme à l'infini :

$$\psi(r,\theta) \xrightarrow[r\to\infty]{} r \sin\theta$$

La symétrie de l'écoulement conduit à rechercher la solution sous la forme du développement :

$$\psi = \sum_n f_n(r)\sin(n\theta)$$

Après une manipulation algébrique, la solution au premier ordre (n=1) est :

$$\psi_1(r,\theta) = (\alpha_1\ r\ \mathrm{Log}\ r + \beta_1 \frac{1}{r} + \gamma_1\ r^3 + \delta_1\ r)\ \sin\theta$$

Les conditions aux limites permettent de former un système linéaire pour la détermination des coefficients α_1, β_1, γ_1, δ_1. Or ce système n'a pas de solution. C'est le paradoxede Stokes.

Mais il ne faut pas conclure qu'une telle approche est totalement erronée. Elle reste valable près de l'obstacle où les forces de viscosité sont prépondérantes. Ce développement en effet conduit à négliger les forces d'inertie dans tout le domaine d'intégration, et ceci bien sûr n'est pas valable loin de l'obstacle.

Pour lever ce paradoxe, on utilise la méthode des développements raccordés. Un développement intérieur rend compte du phénomène près de l'obstacle : c'est le domaine de Stokes, un développement extérieur rend compte du comportement de l'écoulement loin du cylindre : c'est le domaine d'Oseen. Les différents termes des développements sont fonction du "petit paramètre" Re. Ainsi formulé, le problème se ramène à :

- Un développement intérieur :

$$\psi^{in} = f_o(Re)\ \psi_o^{in} + f_1(Re)\ \psi_1^{in} + \ldots \quad ; \quad r = 1 \text{ : le fluide adhère à la paroi.}$$

- Un développement extérieur fonction de la variable d'Oseen $\rho' = rRe$:

$$\psi^{ex} = F_o(Re)\ \psi_o^{ex} + F_1(Re)\ \psi_1^{ex} + \ldots \quad ; \quad \rho' \to \infty \text{ : écoulement uniforme.}$$

- Raccordement des deux développements.

Des solutions du 1er, 2e, 3e ordre ont été établies. Nous ne donnerons que le comportement de la solution au 1er ordre du domaine d'Oseen lorsque $\rho' \to \infty$, pour le rotationnel ω :

$$\rho' \to \infty \qquad \omega(\rho',\theta) = \frac{1}{4} G(\theta)\ \rho'^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{4}\rho'(\cos\theta - 1)\right]$$

Nous utiliserons cette solution comme condition limite pour l'équation du rotationnel lors du traitement numérique.

II.2. REGIME LAMINAIRE STATIONNAIRE DECOLLE

Ce régime voit l'apparition de deux tourbillons symétriques à l'arrière du cylindre constituant un "bulbe" de décollement, dont la longueur croît comme le nombre de Reynolds. De nombreuses études expérimentales ont été faites en particulier par KOVAZNAY (1949), ACRIVOS (1965), DIMOPOULOS et al (1968), TRITTON (1971), NISHIOKA et al (1974), COUTANCEAU et al (1977), soit à l'aide de visualisations par des traceurs, soit par mesures effectuées à l'anémométrie fil chaud. Nous avons porté sur la figure 2 les valeurs des paramètres globaux de l'écoulement : longueur de recollement L/r_o, coefficient de traînée C_x, angle de décollement θ_d.

Il n'existe pas à l'heure actuelle de solution analytique des équations de Navier-Stokes complètes pour cet écoulement. Des simplifications permettent cependant des approches mathématiques :

- séparation du domaine en deux régions : une zone extérieure où l'écoulement à potentiel règne et une zone morte délimitée par l'obstacle et le sillage.
- schéma de tourbillons ponctuels immobiles placés à l'arrière.

Ces solutions sont loin de rendre compte de tous les mécanismes et traduisent fort mal certains paramètres.

THOM en 1928 fut le permier à proposer une solution numérique des équations complètes pour $Re = 10$. Le développement des techniques numériques et l'avènement des ordinateurs puissants, lors de ces vingt dernières années, ont rendu possible le traitement numérique de cet écoulement. Nous donnons dans le chapitre III une revue de ces travaux.

II.3. REGIME LAMINAIRE DECOLLE INSTATIONNAIRE AVEC ALLEES TOURBILLONNAIRES

Pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 40 - 50, on décèle dans le sillage des instabilités. Elles prennent un caractère périodique et sont le prélude au phénomène bien connu des allées tourbillonnaires.

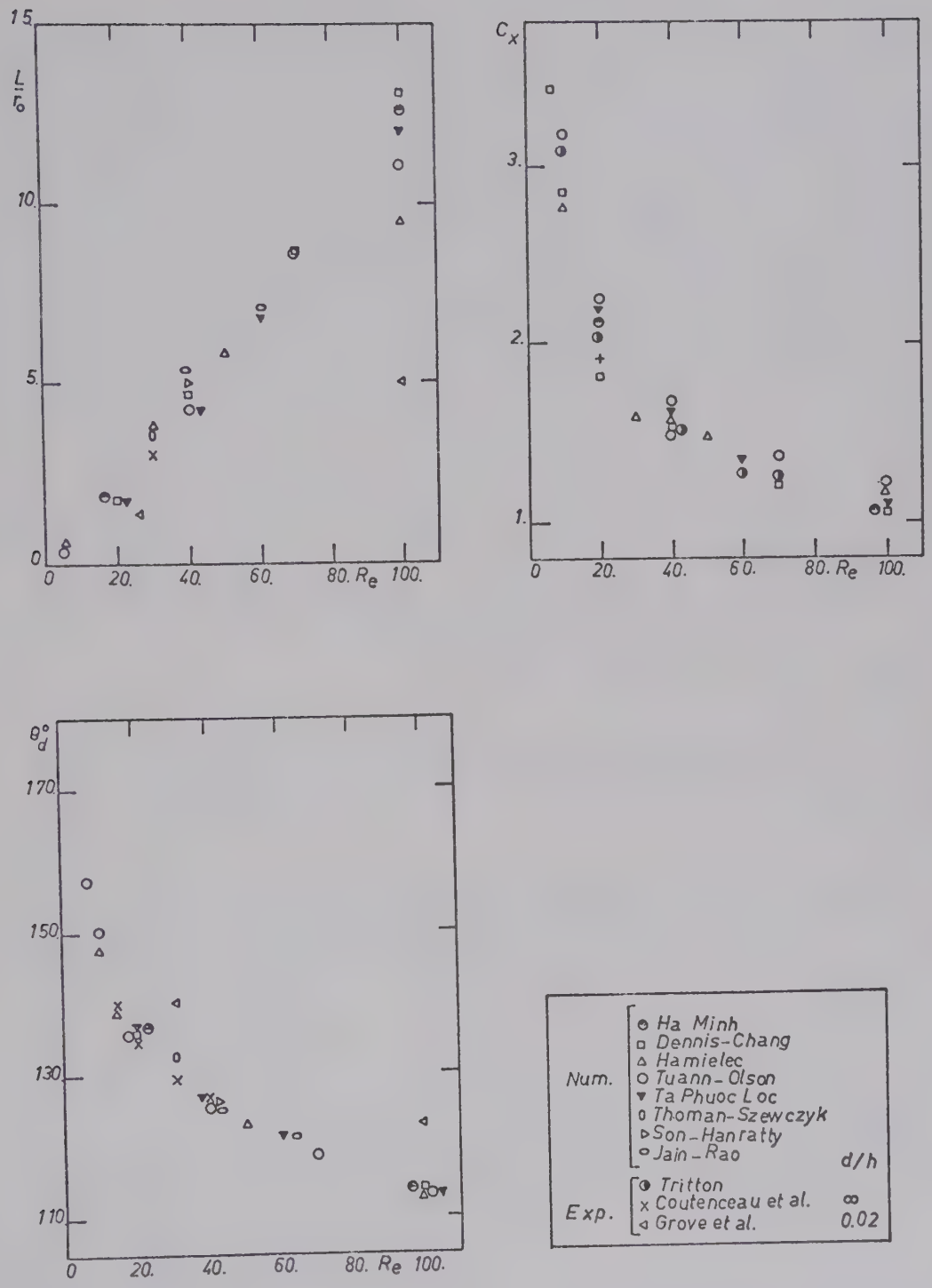


Figure 2 : Principaux résultats sur l'écoulement symétrique décollé derrière un cylindre à nombres de Reynolds modérés.

Si Leonardo de Vinci dessinait au XVe siècle une vue de tourbillons à l'arrière d'obstacles, les premières observations quantifiées furent entreprises par Strouhal en 1878. Le sillage formé par le confluent de deux couches décollées est instable aux perturbations asymétriques. La non-linéarité des équations qui régissent l'écoulement amplifie ces perturbations présentes inévitablement. Von Karman en 1911 proposa un modèle de sillage tourbillonnaire idéalisé en fluide parfait dans un écoulement en équilibre, dans lequel des tourbillons ponctuels sont rangés en quiconce (figure 3). Il établissait un critère de stabilité de cette configuration : b/a = 0,281.

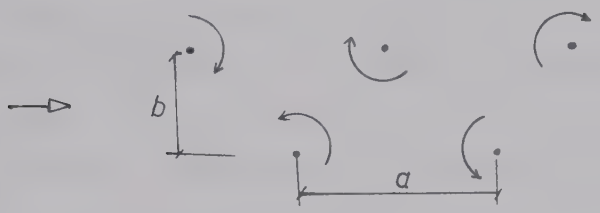


Figure 3 : allée tourbillonnaire idéalisée de Von Karman

La fréquence du mécanisme séquentiel f peut s'exprimer sous forme réduite, à l'aide du nombre de Strouhal :

$$St = f \frac{2r_o}{U_\infty}$$

Des lois expérimentales établissent une relation St(Re) entre le nombre de Strouhal et le nombre de Reynolds compris entre 50 et 160.

Tous les auteurs concluent qu'au delà de Re = 90, 100, les tourbillons à l'arrière de l'obstacle se détachent alternativement de part et d'autre du culot et son convectés dans le sillage formant les allées tourbillonnaires. C'est le régime de mode supérieur selon la dénomination de BERGER et TRITTON. Pour le régime Re = 50, 90, 100 deux explications sont données.

Auteurs	Relations St(Re)	Domaine, Re
ROSHKO (1954)	St = 0,212 - 4,5/Re	$50 \leqslant Re \leqslant 160$
TRITTON (1971)	St = 0,144-2,1/Re+ 0,00041Re	$50 \lesssim Re \lesssim$ 90-100
BERGER (1972)	St = 0,197 - 3,9/Re	$50 \lesssim Re \lesssim$ 90-100
TRITTON (1971)	St = 0,224 - 6,7/Re	$90,100_r < Re < 160$
BERGER (1971)		
KOHAN (1973)	St = 0,19 - 3,57/Re	$40 < Re < 75$
	St = 0,216 - 5,77/Re	$90 < Re < 130$
SCHWARZ	St = 0,19 - 2,60/Re	$130 < Re < 160$

Lois expérimentales liant le nombre de Strouhal (St) au nombre de Reynolds (Re)

Aux nombres de Reynolds voisins de 100, TRITTON (1971), BERGER (1972) constatent une irrégularité de la pente de la relation St(Re) qui leur permet de distinguer deux modes : inférieur (Re = 50, 90, 100) ; supérieur (Re = 90, 100, 160). Le mode supérieur correspondrait au détachemant et à la convection des tourbillons produits à l'arrière de l'obstacle ("vortex shedding").

Le mode inférieur est caractérisé par une instabilité de sillage, les tourbillons à l'arrière du cylindre restent attachés, ils oscillent légèrement par le frottement visqueux induit par le battement du sillage (figure 1c).

Cependant les lois St(Re) établies par CAMICHEL (1927), ROSHKO (1954) ne présentent pas de discontinuité. Les observations faites par GASTER (1971) excluent également l'existence de deux mécanismes. Le régime d'allées tourbillonnaires serait régi par un mécanisme unique : le détachement et la convection des tourbillons formés à l'arrière du cylindre sur tout le domaine allant de Re = 40, 50 à 160. D'autres auteurs attribuent cette discontinuité à l'apparition d'un caractère tridimensionnel, lié à l'inclinaison de l'axe de tourbillons par rapport à la génératrice du cylindre.

Le régime d'allée alternée de tourbillons se conserve très loin à l'aval ainsi que le révèle le spectre d'énergie réduit à un pic (ROSHKO, 1954). Les forces induites sur l'obstacle sont également périodiques. L'asymétrie instantanée de l'écoulement engendre une portance et un couple de rotation (JORDAN et al, 1972). Ici encore seul un traitement numérique permet d'approcher la solution des équations de Navier Stokes qui régissent ce phénomène. Cependant les simulations numériques des allées tourbillonnaires nécessitent l'injection d'une perturbation numérique. Ainsi apparaît un fait troublant bien que familier à l'expérimentateur : le mouvement non permanent du sillage, bien que les conditions aux frontières soient indépendantes du temps (DYMENT, 1977).

Notons enfin les expériences de ACRIVOS et al (1965), DIMOPOULOS (1968) qui ont montré que la présence d'une plaque de recollement placée à l'arrière de l'obstacle maintenait le caractère symétrique de l'écoulement bien au-delà des nombres de Reynolds 40 - 50.

II.4. REGIME SUBCRITIQUE ET SUPERCRITIQUE

A partir d'un nombre de Reynolds de 200 environ, la couche décollée présente un caractère turbulent qui va s'amplifiant lorsque cette couche s'enroule dans le sillage et est convectée à l'arrière. Tant que la couche limite attachée demeure laminaire, on parle de régime turbulent subcritique ($Re < 2.10^5 - 6.10^5$). Au delà celle-ci devient également turbulente, c'est le régime turbulent supercritique. La transition se manifeste en particulier par une brusque variation du coefficient de traînée (figure 4) et un basculement vers l'aval de l'angle de décollement.

L'apparition de la turbulence se manifeste par un étalement du spectre d'énergie de vitesse rendant compte de la présence de tourbillons de diverses tailles. Cependant un pic d'énergie subsiste dans le spectre sur une zone assez étendue, à l'aval du cylindre ROSHKO (1954) SONNEVILLE (1976), BOISSON (1978) comme on peut voir sur la figure 5.

Ce pic spectral traduit l'existence d'une organisation préférentielle de l'écoulement turbulent.

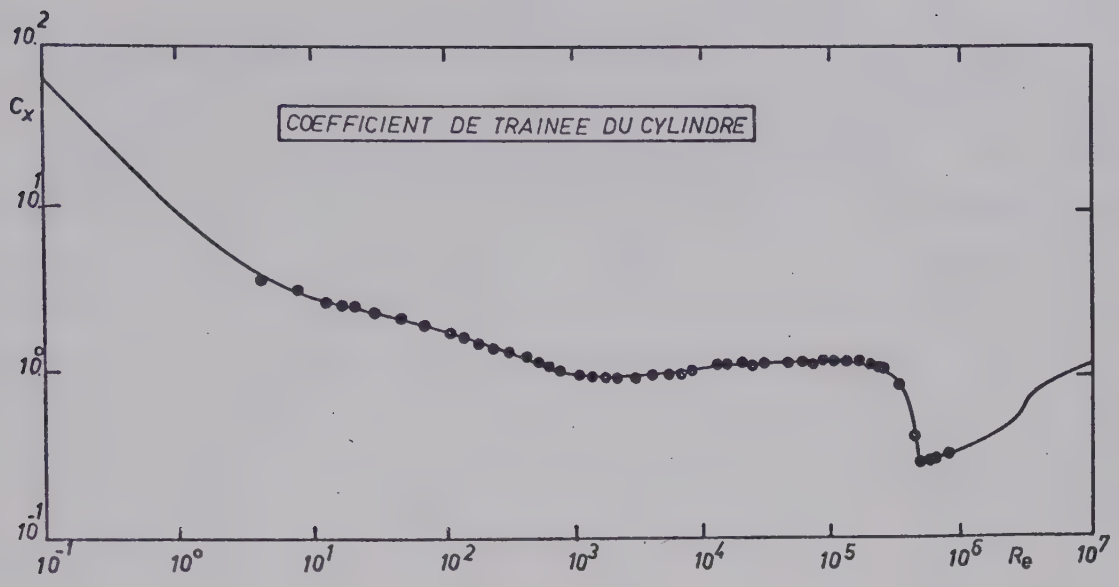


Figure 4 : évolution du coefficient de traînée d'un cylindre en fonction du nombre de Reynolds.

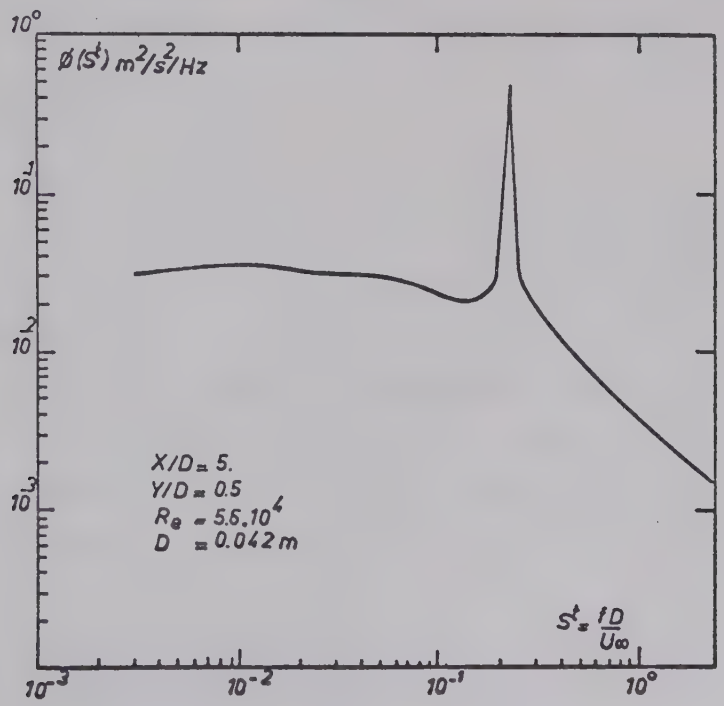


Figure 5 : Spectre d'énergie de vitesse dans le sillage du cylindre. Résultat aimablement communiqué par M. BOISSON (1978)

Ce problème est extrêmement important aussi bien en ce qui concerne les forces appliquées à l'obstacle que la modélisation de l'écoulement turbulent. On ne peut plus en effet appliquer des modèles turbulents qui supposent un spectre monotone décroissant. Des mesures de moyennes conditionnelles conduites par DAVIES (1976) semblent montrer qu'une structure moyenne d'allées tourbillonnaires se superpose à un fond turbulent aléatoire. Ces mesures sont corroborées par des visualisations qui ne laissent pas de doute sur la nature de ces structures. On peut ainsi penser que des solutions instationnaires analogues à celles qui sont développées pour les allées tourbillonnaires laminaires aient des chances de pouvoir être adaptées à la détermination de certains paramètres en régime turbulent instationnaire.

III. TRANSFERT THERMIQUE AUTOUR D'UN CYLINDRE CHAUFFE

La loi globale de transfert de chaleur s'exprime à l'aide du nombre de Nusselt moyen :

$$\overline{Nu} = \overline{q}. \frac{2r_o}{\lambda (Tp-T_\infty)}$$

où $\overline{q}$ est le flux de chaleur moyen à la paroi et $\frac{\lambda (Tp-T_\infty)}{2r_o}$ est le flux de chaleur de référence. Tp et T_∞ sont respectivement la température à la paroi du cylindre et T_∞ la température du fluide amont.

En toute rigueur les propriétés physiques du fluide sont des fonctions de la température. Lorsque les variations sont importantes, cas de l'anémométrie à fil chaud par exemple, ces propriétés sont exprimées à une température moyenne $T_f = \frac{1}{2} (T_\infty+Tp)$, appelée température du film.

Dans les utilisations courantes de ce dispositif, dans des gaz à vitesse subsonique, le nombre de Reynolds est de l'ordre de 1 à 10 alors que le nombre de Grashof est très faible ($Gr << 1$), en raison du faible diamètre des sondes $o(10^{-6}$ mm). Le mécanisme de transfert de chaleur est de type convection forcée. Cependant pour les écoulements à

faible vitesse la convection naturelle peut avoir une influence. Nous verrons dans le chapitre expérimental ce cas de fonctionnement limite.

Il est généralement admis à la suite des travaux expérimentaux de COLLIS et WILLIAMS (1959), GEBHART et PERA (1970) en particulier, que les effets de convection naturelle sont négligeables dès que $Re_\infty > Gr_\infty^{1/3}$. Il vient alors :

$$\overline{Nu} = \overline{Nu}\ [Re,\ Pr,\ (Tp-T_\infty)]$$

La détermination théorique du nombre de Nusselt ne peut être effectuée que pour les régimes à très faibles nombres de Reynolds, pour lesquels des solutions sous forme de développements sont proposées.

L'utilisation, aujourd'hui courante, des sondes à fil chaud dans les laboratoires de mécanique des fluides et dans certaines applications industrielles, a conduit à rechercher des lois expérimentales pour déterminer les lois de refroidissement.

III.1. TRANSFERT DE CHALEUR A FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS ($Re<1$)

La connaissance de la solution dynamique (cf. II.1.) sous forme de développement permet de déterminer de façon analogue le champ thermique en utilisant les solutions dynamiques.

COLE et ROSHKO ont pu établir la loi asymptotique du champ de température dans le domaine d'Oseen. Ainsi lorsque :

$$\chi = \frac{1}{4}\, r\ Pr.Re \to \infty \quad \text{(variable d'Oseen)}$$

il vient :

$$T(\chi,\theta) = G(\theta)\ \chi^{-1/2}\ \exp\ [\chi(\cos\theta - 1)]$$

Nous utiliserons cette relation dans le traitement numérique de l'équation de la température.

Plusieurs expressions théoriques ont été proposées pour des nombres de Péclet ($Pr.Re$) modérés. Ces solutions sont généralement des raffinements de la loi de COLE et ROSHKO :

$$\overline{Nu} = 2/[\log(8/Pe) - \gamma] \qquad (2)$$

γ : cte d'Euler, $Pe \to 0$

Ces lois sont confirmées par des mesures expérimentales de COLLIS et WILLIAMS (1959), BAILLE (1973).

Nous avons porté sur la figure 7 les diverses lois (extrait de HIEBER, 1967).

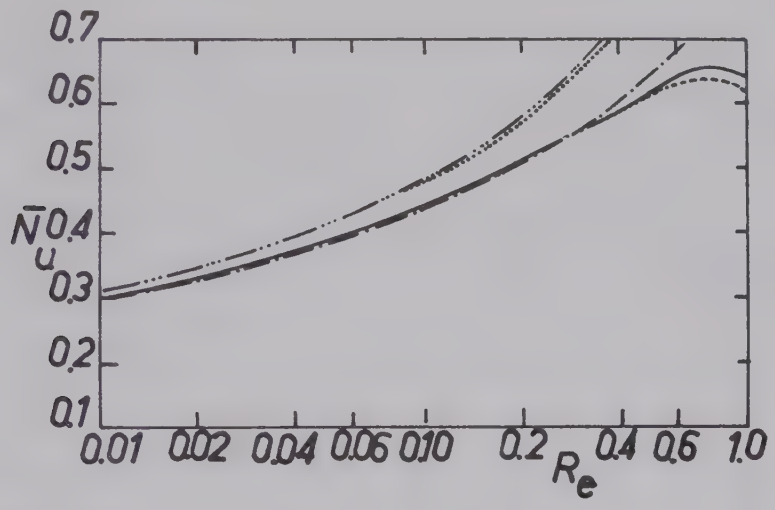


Figure 7 : Variation du nombre de Nusselt moyen aux faibles nombres de Reynolds (HIEBER, 1967)

—·—·— COLE et ROSHKO ····· ILLINGWORTH

——— HIEBERT et GEBHART —·—· COLLIS et WILLIAMS (exp.)

- - - - - WOOD

Le régime de convection mixte [$\overline{Nu}(Pr, Re, Gr)$] n'a été traité qu'expérimentalement par COLLIS-WILLIAMS (1959), GEBHARD-PERA (1970). Il a été mis en évidence la forte dépendance des résultats à l'allongement du fil.

III.2. REGIME DE CONVECTION FORCEE A DES NOMBRES DE REYNOLDS MODERES

Un grand nombre d'expressions ont été proposées depuis la loi de KING (1914). Elles peuvent se regrouper sous la forme :

$$\overline{Nu} = A(Pr) + B(Pr)\ Re^{n}$$

MAC ADAMS en 1954 en collectant de nombreux résultats, donnait pour l'air, en précisant les valeurs des coefficients :

$$\overline{Nu} = 0,43 + 0,48\ Re^{0.5} \qquad 0,1 < Re < 1000 \qquad (3)$$

HILPERT présentait, pour l'air, une expression sous la forme :

$$\overline{Nu} = C[Re(\frac{Tp}{T_\infty})^{1/4}]^{n} \qquad (4)$$

où les propriétés physiques du fluide sont calculées à la température de film, avec :

Re	C	n
1 - 4	0,891	0,330
4 - 40	0,821	0,385
40 - 4000	0,615	0,466

Alors que COLLIS et WILLIAMS (1959) présentaient leurs résultats sous la forme de la loi de KING :

$$\overline{Nu} = (A + B\ Re^{n})(\frac{Tf}{T_\infty})^{0.17} \qquad (5)$$

Re	A	B	n
0,02 - 44	0,24	0,56	0,45
44 - 140	0	0,48	0,51

La discontinuité de l'expression (5) pour $Re = 44$ étant attribuée par les auteurs à l'apparition des allées tourbillonnaires.

CHURCHILL et BERNSTEIN (1977) collectaient de nombreux résultats et ne distinguaient pas de discontinuité, ils proposent :

$$\overline{Nu} = 0,3 + 0,62\ Pr^{1/3}\ Re^{1/2}/[1 + (0,4/Pr)^{2/3}]^{1/4} \qquad (7)$$

$$Re < 10^3$$

Des expériences numériques ont été réalisées. Citons en particulier DENNIS et al (1968), KRALL et al (1970) pour l'écoulement symétrique. Seuls, à notre connaissance, JAIN et GOEL (1976) ont traité le régime d'allées tourbillonnaires bien qu'ils n'aient pas atteint le régime établi. HARLOW et FROMM (1964) traitaient le cas d'un cylindre rectangulaire placé entre deux plans parallèles.

Enfin, précisons pour terminer cette revue, que tous les résultats expérimentaux précisés ci-dessus ont été déterminés en évaluant la puissance électrique fournie à des fils résistants placés dans l'écoulement. ECKERT et SOEHNGEN procédaient à des visualisations du champ thermique à l'aide d'un interféromètre Mach-Zehnder.

CHAPITRE III

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE - RESOLUTION NUMERIQUE

CHAPITRE III

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE - RESOLUTION NUMERIQUE

I. INTRODUCTION

Bien que les techniques numériques de résolution des équations de la mécanique des fluides soient devenues un outil familier du chercheur, il nous a semblé nécessaire d'effectuer une étude bibliographique afin de nous guider dans le choix des méthodes à mettre en oeuvre.

Nous avons consigné une partie de ce travail dans deux rapports internes (MARTINEZ, 1978 ; HA MINH, MARTINEZ, BOISSON, 1978). Notre propos est d'essayer de donner une vue d'ensemble des différentes techniques actuelles et plus particulièrement de celles adaptées à la résolution numérique de l'écoulement laminaire autour d'un cylindre. Si ce problème a suscité de très nombreux travaux, THOM exécutait les calculs à la main en 1928 !, les difficultés numériques qu'il pose font de ce sujet un problème test pour éprouver les performances et la précision des méthodes de calcul, comme le témoigne la session qui lui a été consacrée au Congrès de Swansea (1978).

La relative simplicité de mise en oeuvre des schémas aux différences finies fait qu'un grand nombre d'études ont utilisé cette technique. Cependant, les développements des fonctions en séries de Fourier où les coefficients sont déterminés à l'aide des schémas aux différences finies et plus récemment les techniques aux éléments finis ont été également utilisées.

L'engouement pour les schémas aux éléments finis ou des méthodes spectrales a été favorisé par les difficultés rencontrées avec l'utilisation des schémas aux différences finies lorsque des configurations complexes sont étudiées, ou bien lorsque la précision requise semblait

hors de portée (FASEL, 1978). En effet si des formules d'interpolation permettent de suivre les contours tourmentés (FENAIN, 1977), les critères de stabilité des schémas aux différences finies (S.D.F.) conduisent à des conditions trop contraignantes. Ainsi :

- pour les grands nombres de Reynolds Re, l'épaisseur de couche limite proportionnelle à $Re^{-1/2}$, conduit à utiliser un pas spatial δ_S à la paroi tel que :

$$\delta_S^2 \, Re = o(1) \qquad \text{(DAVIES, 1972)}$$

- les pas δ_S peuvent devenir très faibles également pour satisfaire une définition correcte du contour (figure 1).

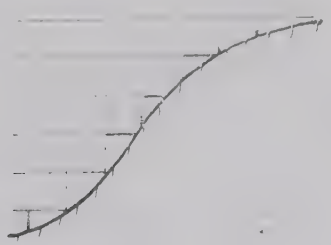


Figure 1 : maillage à la frontière

Par voie de conséquence, lors du traitement des équations instationnaires, les critères de stabilité, liés au paramètre $\delta t/\delta_S^2$ entraînent des pas de temps δt trop faibles.

Les techniques aux éléments finis offrent une grande souplesse pour suivre correctement les contours ; l'utilisation des méthodes spectrales conduit à une précision élevée (ORSAG, ISRAELI, 1974).

Cependant deux améliorations récentes des schémas aux différences finies sont venues renforcer leur intérêt. Il s'agit de :

- L'apparition des schémas aux différences finies "compactes" d'ordre élevé (ordre 4) mis en oeuvre par HIRSH (1975) et qui conduisent à des résolutions performantes (TA PHUOC LOC, 1977 ; BONTOUX et al, 1978 ; HA MINH, 1978 ; DAUBE et TA PHUOC LOC, 1978 ; PEYRET, 1978)

- La génération de transformations numériques récentes (THOMPSON, 1978) permet le traitement de configurations complexes à l'aide des S.D.F.

Ces améliorations apportées aux schémas aux différences finies renforcent leur intérêt.

II. ORDRE DE PRECISION. STABILITE DES SCHEMAS

L'approximation des opérateurs différentiels par des opérateurs linéaires se traduit par une erreur de troncature proportionnelle à l'ordre de l'approximant. Cela se manifeste généralement à travers une viscosité artificielle qui va modifier le nombre de Reynolds imposé (THOMAN, SZYWCZYK, 1969). Le traitement des systèmes différentiels non linéaires conduit à utiliser parfois, afin de sauvegarder la stabilité mise en défaut par les termes non linéaires, des schémas décentrés d'ordre 1, comme c'est le cas pour les équations de Navier-Stokes. Il en résulte alors une perte sensible de précision.

L'analyse linéaire de stabilité fournit des informations précises sur les conditions d'utilisation des S.D.F. pour résoudre des systèmes différentiels linéaires en respectant les critères de consistance et de stabilité ainsi que sur la précision escomptée (YANENKO, 1968 ; FORSYTHE, WASSOW, 1960). Mais, l'application de tels critères à des systèmes aux dérivées partielles non linéaires ne garantit pas la réussite de la résolution.

Les équations de type parabolique sont résolues soit par des schémas explicites, ou schéma aval, soit par des schémas implicites. Pour les premiers [$o(\delta t)$], l'analyse linéaire de stabilité fournit des critères sur les paramètres de discrétisation qui peuvent être parfois très restrictifs. Ainsi, pour un écoulement bidimensionnel, nous sommes conduits à garantir :

$$\delta t < \frac{1}{\frac{2}{Re}\left[1/\delta x^2+1/\delta y^2\right] + |u|/\delta x + |v|/\delta y} \qquad \text{(pour u, v constants)}$$

Pratiquement, la résolution de systèmes non linéaires conduit à une condition plus restrictive, et qui ne pourra être établie qu'expérimentalement.

La formulation implicite (stable inconditionnellement dans l'analyse linéaire) et précise à l'ordre $o(\delta t^2)$ permet d'avancer avec des pas de temps plus importants. Son utilisation conduit cependant à l'inversion (directe ou itérative) de systèmes qui peuvent être très volumineux (plusieurs milliers d'inconnues). De plus, l'amplitude du pas δt rencontre des limitations dues aux termes non linéaires.

Ainsi, pour chaque problème à traiter, il doit exister un domaine optimum pour chaque schéma (explicite, implicite) en fonction de l'ordre de précision spatiale requise (FASEL, 1978) comme l'indique la figure 2.

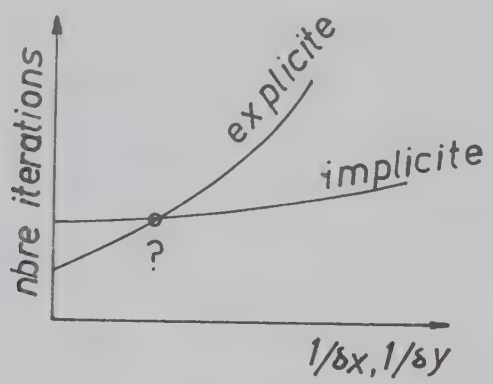


Figure 2

La formulation A.D.I. (Alternating Direction Implicit) ou méthode implicite à directions alternées que nous expliciterons au chapitre IV conduit à des systèmes linéaires triangulaires pour lesquels des inversions directes rapides existent (voir rapport interne MARTINEZ, 1978).

Enfin, nous retiendrons que chaque simulation numérique est un cas d'espèce et qu'il n'existe pas a priori, de méthode idéale. Si l'outil numérique est d'une grande puissance, les résultats fournis doivent être analysés avec beaucoup de sens critique et comparés à l'expérience.

III. REVUE DES TRAVAUX RECENTS DE SIMULATION DE L'ECOULEMENT LAMINAIRE AUTOUR D'UN CYLINDRE

Le tableau I regroupe une partie des études numériques qui furent consacrées au cours de ces dix dernières années à l'écoulement autour d'un cylindre.

Les premiers travaux traitaient les équations stationnaires relatives à l'écoulement symétrique. La nécessité de simuler les allées tourbillonnaires ou l'écoulement à grand nombre de Reynolds, étudié ultérieurement, a donné lieu au traitement des équations instationnaires. Les techniques de résolution reposent généralement sur les schémas aux différences finies et (ou) sur des développements des fonctions en série ; depuis peu d'années, la technique des éléments finis a été aussi utilisée.

Auteurs	*Re*
▪ *Equations stationnaires*	
S.C.R. DENNIS et al (1968)	0,5 - 40
H.E. HAMIELEC (1969)	1 - 500
S.C.R. DENNIS et G. CHANG (1970)	5 - 100
TA PHUOC LOC (1975)	5 - 120
H. HA MINH (1978)	20 - 100
S.Y. TUANN, M.D. OLSON (1978)	1 - 100
▪ *Equations instationnaires. Ecoulement symétrique*	
J.S. SON, T.J. HANRATTY (1969)	40 - 200 - 500
P.C. JAIN, K.S. RAO (1969)	40 - 60 - 100 - 200
W.M. COLLINS, S.C.R. DENNIS (1973)	5 - ∞
V.A. PATEL (1976)	60 - 600
K.A. KLIFFE et al (1978)	20 - 100

.../...

Auteurs	Re
- *Equations instationnaires. Sillage asymétrique. Cylindre au repos ou en rotation*	
D.C. THOMAN et A.A. SZEWCZYK (1969)	$1 - 3.10^5$
S.K. JORDAN, J.E. FROMM (1972)	40 - 100 - 1000
A.J. CHORIN (1972)*	$10 - 10^5$
C.L. LIN, D.W. PEPPER, S.C. LEE (1972)	40 - 80 - 200
J.B. CHIRSTIANSEN, J.N. ZABUSKY (1973)*	
O. DAUBE, TA PHUOC LOC (1978	100
P.M. GRESHO et al (1978)	100

TABLEAU I : revue des derniers travaux de simulation numérique de l'écoulement autour d'un cylindre. (* fluide parfait).

Si la première procédure détermine l'écoulement à partir des variables de Helmholtz (ψ,ω) la simulation à l'aide des éléments finis peut s'envisager aussi avec les variables hydrodynamiques (u,v,p).

III.1. EQUATIONS STATIONNAIRES

Dans ce cas, les conditions aux limites du système aux dérivées partielles sont définies par les conditions d'adhérence à la paroi et d'écoulement potentiel à l'extérieur ; la symétrie de l'écoulement étant mise à profit bien évidemment.

Remarquons ici deux difficultés inhérentes à toute technique qui traite ce problème :

- L'écoulement simulé n'est pas confiné, la condition d'uniformité de l'écoulement ne peut être rigoureusement imposée qu'à l'infini ($r \to \infty$). Or numérique le domaine d'intégration est forcément limité. En imposant à une distance finie cette condition, il se produit une sorte de confinement dont l'influence va en diminuant lorsque la frontière extérieure est repoussée plus loin. La condition d'uniformité peut alors être remplacée par l'écoulement potentiel.

- Si les conditions sur la fonction courant sont surabondantes (la fonction et sa dérivée normale) la fonction tourbillon à la paroi, elle, n'est pas connue explicitement ; elle devra être déduite de l'équation de continuité écrite à la paroi. Il vient :

$$\omega_p = \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}\right|_{\text{paroi}} \qquad \vec{n} \text{ normale à la paroi (p)}$$

Ainsi donc les conditions aux limites ne sont pas connues explicitement.

Le système d'équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre est résolu par un double système itératif, à savoir :

1) Résolution itérative de l'équation de transport du tourbillon
2) Résolution itérative de l'équation de continuité
3) Modification du tourbillon à la paroi et retour à 1) jusqu'à convergence.

Le caractère elliptique allié à la non linéarité et à des conditions aux limites (ω_p) évolutives conduit à effectuer un grand nombre d'itérations pour atteindre la convergence.

III.2. EQUATIONS INSTATIONNAIRES

L'écoulement avec allée tourbillonnaire ne peut être simulé qu'à l'aide des équations instationnaires. La résolution de l'écoulement symétrique à nombres de Reynolds élevés conduit à des instabilités numériques. Cette difficulté a pu être surmontée en recherchant la solution limite du régime instationnaire (SON et HANRATTY, 1969 ; JAIN et RAO, 1969).

Pour les travaux qui utilisent des schémas explicites, les restrictions imposées sur les paramètres de discrétisation conduisent à des temps de calcul élevés (plusieurs heures parfois). En effet, l'équation de Poisson déduite de la condition de continuité qui doit

être satisfaite à chaque pas de temps, peut conduire, si la résolution n'est pas effectuée avec un code de calcul performant, à une augmentation considérable du temps de calcul.

Les schémas implicites, bien qu'ils conduisent à la résolution de systèmes d'ordre élevé sont plus précis, ordre $[o(\delta t^2)]$ et assurent une stabilité meilleure. Inconditionnelle pour les équations linéaires, elle est évidemment limitée ici, par suite de la non linéarité des termes de convection et de l'instationnarité des conditions aux limites.

L'utilisation de schémas A.D.I. $[o(\delta t^2)]$ s'avère très intéressante car elle conduit à des systèmes linéaires tridiagonaux d'inversion rapide et stable (voir rapport interne MARTINEZ, 1978)

En général, la condition initiale imposée correspond à un démarrage brusque de l'écoulement porté à la vitesse nominale au loin. Il a été démontré (PATEL, 1976) que les équations présentent une discontinuité par rapport à la variable temps, laquelle peut être surmontée à l'aide de la théorie de la couche limite instationnaire. Si une telle procédure n'est pas utilisée dans les premiers pas de temps, les résultats initiaux n'ont pas de signification physique et peuvent même faire apparaître une traînée négative (THOMAN, SZEWCZYK, 1969).

L'utilisation de schémas centrés entraîne dans les procédures classiques une perte de stabilité due à la perte de diagonale dominante des systèmes linéaires par suite des termes de convection. La discrétisation de ces derniers par des schémas décentrés simples rétablit la stabilité au détriment de la précision $o(\delta x, \delta y)$.

La stationnarité des conditions extérieures et leur symétrie font que le régime instationnaire d'allée tourbillonnaire, présent expérimentalement à des nombres de Reynolds supérieurs à 40, ne peut apparaître que lorsque des perturbations numériques asymétriques ont été injectées.

A la suite des travaux numériques sur les cylindres circulaires immobiles, des simulations autour de cylindres circulaires ou elliptiques en rotation ou oscillants sont également à mentionner (LUG, OHRING, 1978) (DAUBE, TA PHUOC LOC, 1978).

CHAPITRE IV

ETUDE NUMERIQUE

CHAPITRE IV

ETUDE NUMERIQUE

I. INTRODUCTION

Telles qu'elles ont été présentées au chapitre I, les équations régissant :

- la fonction de courant ψ
- la fonction de rotationnel ω
- la température

dans le système de coordonnées (θ, Z) s'écrivent :

- Equation de transport du tourbillon :

$$E_Z \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial \omega}{\partial Z} + \frac{\partial \psi}{\partial Z}\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{2}{Re}\Delta\omega \qquad (1)$$

- Equation de continuité :

$$\Delta\psi = E_Z.\omega \qquad (2)$$

- Equation de transport de la température (en négligeant la dissipation et le terme de pression)

$$E_Z \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{\partial \psi}{\partial Z}\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{2}{Pr.Re}\Delta T \qquad (3)$$

avec : $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial Z^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ Laplacien ; $E_Z = e^{2Z} = r^2$ (ici a = 1)

Les vitesses, angulaire et radiale, sont déterminées par :

$$u_\theta = \frac{1}{E_Z^{1/2}} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \quad ; \quad u_Z = - \frac{1}{E_Z^{1/2}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

Les conditions aux limites sont pour les variables dynamiques :

- Condition d'adhérence à la paroi :

$$Z = 0 \quad ; \quad \psi(\theta,0) = \left. \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right|_{Z=0} = 0$$

- Ecoulement potentiel pour la frontière extérieure numérique formée par un cercle concentrique au cylindre, de rayon $r_\infty = e^{Z_\infty}$, soit :

$$\psi(\theta,Z_\infty) = 2 \sin\theta.\sinh(Z_\infty)$$

Pour le champ de température, nous supposerons que le cylindre est maintenu à une température constante, soit :

$$T(\theta,0) = 1$$

Nous préciserons plus tard les conditions extérieures pour le tourbillon et la température.

A l'instant initial, le fluide extérieur au domaine de résolution est porté à une vitesse uniforme U_∞, alors que le cylindre est porté à une température constante égale à l'unité.

La périodicité des variables ψ, ω, T suivant la variable θ entraîne :

$$\psi(0,Z) = \psi(2\pi,Z) \quad ; \quad \omega(0,Z) = \omega(2\pi,Z) \quad ; \quad T(0,Z) = T(2\pi,Z)$$

Lorsque l'écoulement symétrique est traité, la résolution est limitée au demi-domaine $(0,\pi).(0,Z_\infty)$, il vient :

$$\psi(0,Z) = \psi(\pi,Z) = 0 \quad ; \quad \omega(0,Z) = \omega(\pi,Z) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta}(0,Z) = \frac{\partial T}{\partial \theta}(\pi,Z) = 0$$

Un maillage uniforme est construit dans le plan transformé (θ,Z) Dans le plan physique (θ,r) il lui correspond un maillage régulier suivant

la coordonnée θ et à évolution exponentielle suivant la coordonnée r.

Les équations (1), (2), (3) sont approximées par des schémas aux différences finies en chaque noeud du maillage.

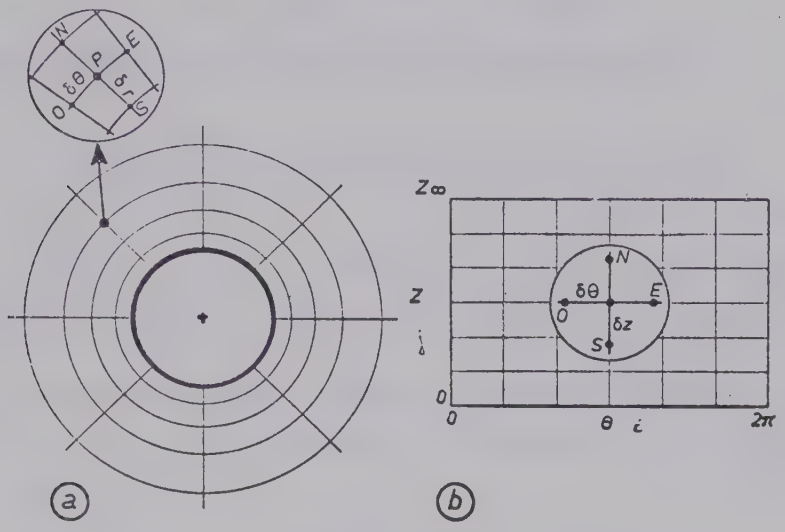


Figure 1 : discrétisation du domaine
a) plan physique, b) plan transformé

L'équation de continuité est résolue soit par le schéma implicite à directions alternées optimisé (A.D.I. 0) soit par la méthode de transformation de Fourier rapide mixte (F.F.T. m). Les équations de transport du tourbillon et de la température le sont par le schéma A.D.I.

Nous exposerons en détail ces techniques dans la suite de ce chapitre ainsi que les études de précision et de rapidité de ces algorithmes de calcul.

II. EQUATION DE CONTINUITE

L'équation de continuité (2) doit être satisfaite à chaque pas de temps δt. Il est indispensable d'utiliser pour la résolution un code de calcul qui soit rapide. La procédure A.D.I. 0 (WACHSPRESS, 1964)

et la procédure F.F.T m ont été utilisées. Nous allons décrire dans ce paragraphe ces deux codes de calcul en précisant leurs performances respectives telles qu'elles résultent de l'application à des problèmes tests.

II.1. METHODE IMPLICITE A DIRECTIONS ALTERNEES OPTIMISEE (A.D.I. 0)

PEACEMAN et RACHFORD (1955) ont développé la méthode implicite à directions alternées pour résoudre les problèmes d'évolution à deux dimensions [$\phi(x,y,t)$] et les problèmes de champ à deux dimensions [$\phi(x,y)$] par un procédé itératif. WACHSPRESS (1964) a optimisé la procédure pour résoudre les problèmes de champ. Nous avons exposé en détail cette procédure dans un rapport interne (MARTINEZ, 1978). Nous donnons ici les principales étapes nécessaires à sa compréhension.

II.1.1. Principe de la méthode

C'est par un exemple que nous allons introduire cette procédure : considérons pour cela l'équation d'évolution du scalaire $\phi(x,y,t)$ défini sur un domaine Ω (Ω_Γ frontière de Ω)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mathcal{D} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right\} \quad \Omega = [0,1] \times [0,1]$$

avec $t \geqslant 0$ $\quad \phi(x,y) = f(x,y)$ ou $\frac{\partial \phi}{\partial n} = g(x,y)$ sur Ω_Γ

$t = 0$ $\quad \phi(x,y) = 1$ sur Ω

Soit :

- $\delta\tau_n$ le pas de temps à la $n^{ième}$ itération $\delta\tau_n = t_{n+1} - t_n$
- $h = h_x = h_y$ le pas spatial du domaine discrétisé
- $\lambda = \mathcal{D} \cdot \frac{\delta\tau_n}{h^2}$ le coefficient de décroissance de la solution transitoire.
- $\Phi^n(i,j)$ la solution numérique au noeud (i,j), indices relatifs respectivement à la direction x,y

La procédure A.D.I. se caractérise par un fractionnement du pas de temps $\delta\tau_n = \delta\tau_1 + \delta\tau_2$ auquel sont associées les deux relations suivantes :

$$\frac{\Phi^{n+1/2} - \Phi^n}{\delta\tau_1} = \mathcal{D}\{(\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2})_\alpha^{n+1/2} + (\frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2})_\alpha^{n}\} \qquad (4a)$$

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^{n+1/2}}{\delta\tau_2} = \mathcal{D}\{(\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2})_\alpha^{n+1/2} + (\frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2})^{n+1}\} \qquad (4b)$$

Les opérateurs différentiels $\partial^2/\partial x^2$, $\partial^2/\partial y^2$ sont approchés par les opérateurs linéaires $(\delta^2/\delta x^2)_\alpha$, $(\delta^2/\delta y^2)_\alpha$ à l'ordre α.

La première étape (4a) fait évoluer le temps de la quantité $\delta\tau_1$ la direction x est "débloquée", c'est-à-dire que l'approximant $(\delta^2\Phi/\delta x^2)_\alpha$ est évalué à l'instant $t_n + \delta\tau_1$, la direction y reste "bloquée", l'approximant $(\delta^2\Phi/\delta y^2)_\alpha$ est évalué à l'instant t_n. La seconde étape (4b) porte le temps à t_{n+1} en inversant les blocages des directions.

Ainsi pour avancer d'un pas de temps $\delta\tau_n$, nous devons procéder à un double balayage des points (i,j) où la valeur ϕ est à déterminer.

Ce schéma assure la consistance et la stabilité et ceci quelle que soit la valeur de λ (PEACEMAN, RACHFORD (1955), FORSYTHE et WASSOW (1960), YANENKO (1968)). La précision temporelle est d'ordre $o(\delta\tau_n{}^2)$.

Si nous explicitons les relations (4a), (4b) relatives à un point P avec des approximants au 2e ordre, il vient en repérant les points voisins par analogie aux points cardinaux (figure 1) :

$$-\Phi^{n+1/2}(O) + \Phi^{n+1/2}(P)\ [2 + \frac{2h^2}{\mathcal{D}\cdot\delta\tau_1}] - \Phi^{n+1/2}(E) = S^n \qquad (5a)$$

$$-\Phi^{n+1}(N) + \Phi^{n+1}(P)\ [2 + \frac{2h^2}{\mathcal{D}\cdot\delta\tau_2}] - \Phi^{n+1}(S) = S^{n+1} \qquad (5b)$$

avec :
$$S^n = \Phi^n(N) - \Phi^n(P)[\,2 - \frac{2h^2}{\mathcal{D}\cdot\delta\tau_1}\,] + \Phi^n(S)$$

$$S^{n+1} = \Phi^{n+1/2}(O) - \Phi^{n+1/2}(P)[2 - \frac{2h^2}{\mathcal{D}\cdot\delta\tau_2}] + \Phi^{n+1/2}(E)$$

Nous obtenons deux systèmes linéaires présentant certaines propriétés remarquables :

- la matrice associée au système est tridiagonale à diagonale, dominante, symétrique positive.
- chaque colonne (ou ligne) du maillage est un système linéaire non couplé avec les autres colonnes (ou lignes).

Nous donnons en Annexe I, l'algorithme de calcul d'inversion par récurrence de Gauss-Cholesky-Crout de ces systèmes. Soulignons que le nombre d'opérations requises est 8.N (où N est l'ordre du système). Dans le cas particulier des équations (5a,b), il est de 5N. Enfin lorsque la résolution doit être réalisée un grand nombre de fois, le stockage en mémoire de certains coefficients de l'opération de récurrence permet encore de diminuer le nombre d'opérations.

YANENKO (1968) a montré que le problème défini par :

$$\mathcal{D}\left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right\} - s = 0$$

et des conditions aux limites convenables, possède la même solution que celle du problème :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \mathcal{D}\left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right\} - s \qquad t \to \infty$$

obtenue asymptotiquement lorsque $t \to \infty$ et satisfaisant aux mêmes conditions aux limites.

C'est cette propriété qui permet de résoudre l'équation de Poisson (2) par la procédure A.D.I.

Pour les problèmes de champ, où seule la solution finale présente un intérêt (équation 2) il existe une série de paramètres (ω_{kh}, ω_{kv}) itératifs qui rendent la procédure optimum (WACHSPRESS, 1964).

Dans cette procédure d'optimisation, les paramètres $\delta\tau_1$ et $\delta\tau_2$ sont remplacés par ω_{kh}, ω_{kv} paramètres optimaux ; ils n'ont plus la signification physique de pas de temps.

II.1.2. Procédure optimisée du schéma implicite à directions alternées (WACHSPRESS, 1964). Paramètres optimaux.

L'optimisation des procédures itératives consiste à introduire des paramètres qui accélèrent la vitesse de convergence. Soit $\vec{\Phi}^k$ la solution approchée à l'itération k. La norme du vecteur erreur $\vec{e}_k$ qui mesure l'écart entre la solution exacte $\vec{\phi}$ et la solution approchée $\vec{\Phi}^k$ s'exprime dans la base des vecteurs propres de la matrice A du système linéaire par :

$$||\vec{e}_k|| = \sup_{i=1,..N} |c_i \lambda_i^k| = |c_S \lambda_S^k|$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A^{-1} et $|\lambda_S| = \sup_i(|\lambda_i|)$.

La convergence est assurée lorsque $|\lambda_S| < 1$. Il est clair que le but recherché est d'introduire des paramètres itératifs qui rendent le module de la valeur propre λ_S petit devant l'unité.

a) Définition du problème modèle

Soit le système linéaire :

$$A.\vec{\Phi} = \vec{s}$$

obtenu par discrétisation au second ordre de l'équation de Poisson :

$$\Delta\phi = s$$

La matrice A peut être décomposée sous la forme :

$$A = A^H + A^V$$

où les matrices A^H et A^V représentent respectivement les approximants :

$$\left(\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}\right)_2 h^2 \Bigg|_{i,j} \quad ; \quad \left(\frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2}\right)_2 h^2 \Bigg|_{i,j}$$

Les matrices A^H et A^V sont à coefficients constants et tridiagonales. Les coefficients de la diagonale principale sont égaux à 2 et les coefficients des diagonales secondaires à - 1.

Pour ne pas ôter le caractère de diagonale dominante, nous pouvons déjà restreindre les paramètres optimaux ω_{kh}, ω_{kv} aux valeurs positives.

La procédure A.D.I.O se traduit par :

$$\Phi^{k+1/2} = (A^H + \omega_{kh} I)^{-1} [s - (A^V - I\omega_{kh})\ \Phi^k] \qquad (6a)$$

$$\Phi^{k+1} = (A^V + \omega_{kv} I)^{-1} [s - (A^H - I\omega_{kv})\ \Phi^{k+1/2}] \qquad (6b)$$

$k = 1, 2, 3, \ldots t$; I matrice unité.

b) Paramètres optimaux ω_{kh} ; ω_{kv}

WACHSPRESS (1964) a établi pour le problème modèle :

$$\omega_{kv} = \frac{\omega_k + \alpha}{\beta + \delta \cdot \omega_k} \quad ; \quad \omega_{kh} = \frac{\omega_k - \alpha}{\beta - \delta \cdot \omega_k}$$

où $$\omega_k = \frac{2(\eta)^{\tau_k}[1 + (\eta)^{2(1-\tau_k)}]}{1 + (\eta)^{2\tau_k}}$$

et $$\tau_k = \frac{2k - 1}{t} \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \ldots t$$

Les coefficients α, β, γ, η, sont des fonctions des valeurs propres extrêmes des matrices A^H et A^V. Nous devons utiliser la suite des paramètres par ordre décroissant.

La précision de la solution approchée est estimée à l'aide du rayon spectral μ_t du vecteur erreur $\vec{e}_{k+1}$ défini par :

$$\vec{e}_{k+1} = \vec{\Phi}^{k+1} - \vec{\phi} = T_k \cdot \vec{e}_k$$

$$\mu_t[T_t] = \sup_i |\lambda_i| \quad i = 1, \ldots N \quad ; \ \lambda_i \text{ valeurs propres de } T_k$$

$$t \simeq \frac{1}{\pi^2} \mathrm{Log}\left(\frac{\mu_t}{4}\right) \mathrm{Log}(\eta) \qquad \text{si} \qquad \mu_t << 1 \quad \text{et} \quad \eta << 1$$

c) Résumé de la procédure

1/ Evaluer les valeurs propres extrêmes des matrices A^H et A^V

2/ Déterminer les coefficients α, β, γ, η

3/ Déterminer l'entier t (nombre d'itérations) qui assure la précision exigée

4/ Construire la suite ω_k

5/ Construire les suites ω_{kv}, ω_{kh}

6/ Ranger par ordre décroissant les suites ω_{kv}, ω_{kh}

7/ Résolution des équations (6a) (6b) qui prennent une forme analogue des équations (5a) (5b) où les $\delta\tau_1^{-1}$, $\delta\tau_2^{-1}$ sont remplacés respectivement par ω_{kh}, ω_{kv}

Dans l'organisation de notre programme numérique, nous avons effectué la détermination des paramètres optimums à l'aide d'un sous-programme.

II.2. METHODE DE TRANSFORMATION RAPIDE DE FOURIER MIXTE (F.F.T.m)

Cette procédure a été mise au point conjointement avec Monsieur BOISSON H.

L'utilisation de l'algorithme de COOLEY TUKEY sur la transformation rapide de Fourier a permis de généraliser l'emploi des méthodes spectrales. Des études de synthèse ont été proposées notamment par ORZAG, ISRAELI (1974), FASEL (1978) et plus récemment SCHUMANN et al (1979).

Le principe de ces méthodes est basé sur le développement de la solution en une série de fonctions judicieusement choisies et présentant la propriété d'orthogonalité. Le choix de ces fonctions est particulièrement lié à la nature des conditions aux limites.

Il est assez courant d'adopter une série trigonométrique pour la résolution de l'équation de Poisson lorsque les conditions aux limites et la fonction source sont périodiques (SCHUMANN 1979, BOURIOT 1976). Le calcul des coefficients des séries de Fourier, ou inversement la reconstitution de ces séries définies sur un nombre fini de points est alors effectuée par utilisation de l'algorithme F.F.T. dont l'efficacité est bien connue.

Reprenant une idée que l'on peut retrouver en particulier dans les travaux de WILLIAMS (1967), SONNEVILLE (1976) nous avons développé un code de calcul qui utilise la périodicité de l'écoulement autour du cylindre suivant la coordonnée angulaire θ.

Ainsi, il vient :

$$\psi(\theta,Z) = \sum_{i}^{I} \psi_i(Z) e^{j^*(2\pi i\theta)} \qquad (7a)$$

$$\omega(\theta,Z) = \sum_{i}^{I} \omega_i(Z) e^{j^*(2\pi i\theta)} \qquad (7b)$$

j^* : imaginaire

Lorsque les relations (7a) (7b) sont substituées dans l'équation (2), nous obtenons :

$$\sum_{i=o}^{I} \left[\frac{d^2\psi_i}{dZ^2} - i^2 \psi_i - \omega_i\right] e^{j^*(2\pi i\theta)} = 0$$

En utilisant l'orthogonalité, nous sommes conduits à résoudre le système différentiel :

$$\frac{d^2\psi_i}{dZ^2} - i^2 \psi_i = \omega_i \qquad i = 0, 1, \ldots I$$

avec les conditions aux limites transformées de la fonction courant ψ.

La discrétisation spatiale par un schéma aux différences finies centré du second ordre, conduit à :

$$-\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j}\left[2 + n^2\delta Z^2\right] - \psi_{i,j+1} = \delta Z^2 \omega_i$$

Nous avons à résoudre finalement un système linéaire tridiagonal comme dans le schéma (A.D.I.O).

La détermination des coefficients ω_i et la reconstitution de la série (7a) à partir des coefficients ψ_i fait intervenir l'algorithme F.F.T.

La généralisation de ce code de calcul pour des problèmes incluant d'autres conditions aux limites est faite dans un rapport interne (H. BOISSON, G. MARTINEZ, 1979, à paraître).

II.3. ETUDE COMPARATIVE DES PERFORMANCES DES CODES DE CALCUL (A.D.I.O),(F.F.T.m)

Nous avons estimé qu'il était intéressant d'effectuer une étude des performances des deux codes de calcul sur deux problèmes dont la solution analytique est connue.

II.3.1. Premier test : écoulement irrotationnel autour d'un cylindre circulaire

L'écoulement est à potentiel, l'équation (2) se réduit à :

$$\Delta\psi = 0$$

avec : $\psi(\theta,0) = 0$; $\psi(\theta,Z_\infty) = 2\sin\theta\sinh Z_\infty$

La solution analytique s'écrit :

$$\psi(\theta,Z) = 2\sin\theta \sinh Z$$

Seul le demi-domaine $\theta = [0,\pi]$ sera utilisé :

$$\psi(O,Z) = \psi(\pi,Z) = 0$$

Nous avons résolu l'équation de Poisson par (A.D.I.O)

Pour une précision, fixée en terme de rayon spectral, nous avons porté sur la figure 2 le nombre d'itérations requis pour différents pas de maillage, tout en conservant un nombre sensiblement égal de noeuds. Le nombre d'itérations croît de façon approximativement linéaire, le nombre d'opérations requis est proportionnel à l'ordre du système et au nombre d'opérations. Nous obtenons un temps de calcul

directement proportionnel à la précision demandée, ainsi que cela apparaît sur la figure 3.

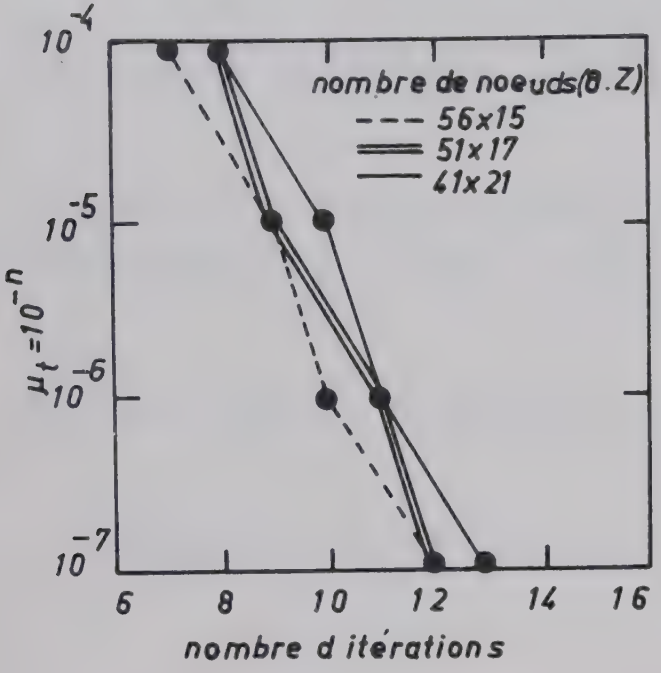


Figure 2 : Procédure A.D.I.o. Evolution du nombre d'itérations en fonction de la précision

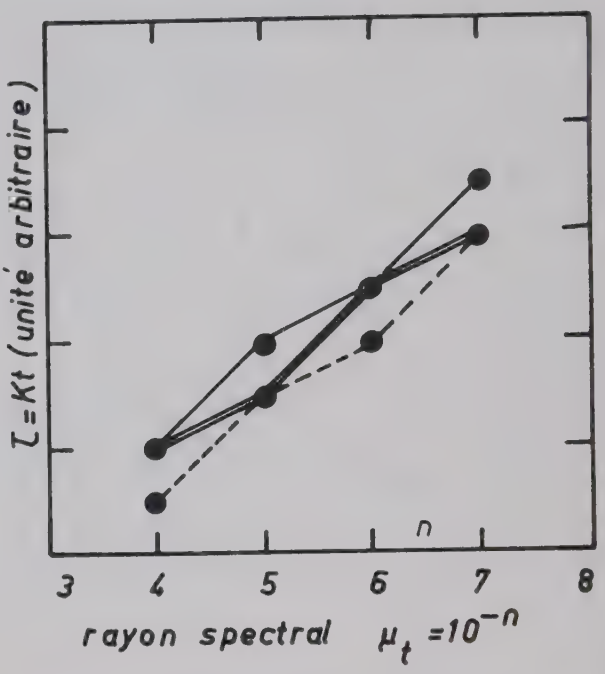


Figure 3 : Procédure A.D.I.o. Temps de calcul (τ) en fonction de la précision μt

Une estimation de la précision effective a été réalisée (figure 4). Cette analyse permet de traduire la correspondance entre le rayon spectral μ_t et la précision effective. Nous avons porté en ordonnée, l'erreur relative moyenne sur tout le domaine, c'est-à-dire :

$$\varepsilon_m = \frac{1}{J \times I} \sum_i^I \sum_j^J \left| \frac{\psi_{e,ij} - \psi_{ni,j}}{\psi_{ei,j}} \right|$$

Deux expériences numériques ont été réalisées qui portent sur deux initialisations différentes :

1°) $\psi \equiv 0$, il vient $e^1_{oi,j} = \psi_{ei,j}$ où $\vec{e}_o$ est le vecteur erreur initial

2°) $\psi = 9/10\ \psi_e$ $\qquad e^2_{oi,j} = 1/10\ e^1_{oi,j}$

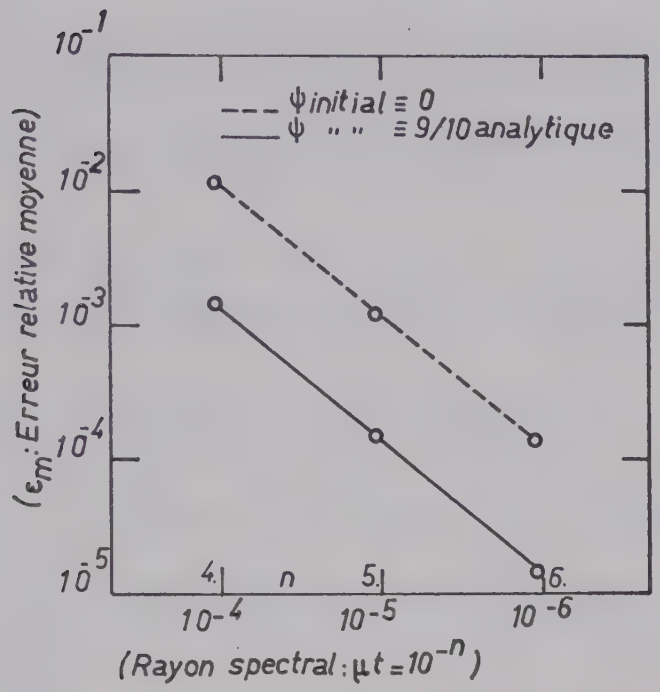


Figure 4 : Evaluation de la précision effective de la procédure A.D.I.O

La relation directe entre la précision effective ε_m et le rayon spectral μ_t ($\varepsilon_m = 10^2 \mu_t$) est ainsi bien vérifiée. La sensibilité du schéma A.D.I.O aux conditions initiales a été également mise en évidence. En effet pour un même rayon spectral, l'erreur ε_m relative au cas 2°) est réduite par un facteur de dix.

Cette dernière propriété sera utilisée dans notre problème (équations 1, 2, 3). Les évolutions de la fonction courant et du rotationnel doivent être modérées d'un pas de temps à l'autre pour assurer le découplage numérique des équations (1) (2). Ainsi nous sommes conduits à résoudre l'équation (2) avec un champ"initial" $\psi(t-\delta t)$ proche du champ à déterminer $\psi(t)$. Le nombre d'itérations requis pour une précision demandée est ainsi allégé.

II.3.2. Deuxième test

La fonction $\psi(\theta,Z) = (\sin\theta + \cos\theta)(\cosh Z-1)$ satisfait l'équation de Poisson $\Delta\psi = s$ définie sur $(\theta,Z) = (0,2\pi).(0,Z_\infty)$ avec $s = \cos\theta + \sin\theta$.

Nous avons testé les codes (F.F.T.m) et A.D.I.O) sur cette solution.

Le tableau I consigne les écarts des solutions numériques ψ_n pour $\delta\theta = \delta Z = \pi/32$; (I x J) = 64 x 43.

	F.F.T. mixte	A. D. I. optimisé		
		$\mu = 10^{-4}$ t = 9	$\mu = 10^{-3}$ t = 7	$\mu = 10^{-3}$* t = 7
$\varepsilon_1.10^3$	7.02	15.06	44.87	15.38
$\varepsilon_2.10^3$	2.59	4.42	7.13	4.35
$\varepsilon_3.10^3$	0.63	1.07	1.73	1.05

Tableau I : comparaison des précisions des codes (F.F.T.m) et (A.D.I.O) par référence à un problème analytique.

Les paramètres ε_1, ε_2, ε_3 traduisent les estimations suivantes :

$$\varepsilon_1 = \sup_{i,j} |\psi_e - \psi_n|$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{I \times J} \sum_{i}^{I} \sum_{j}^{J} |\psi_e - \psi_n|$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2/\psi_{moyen}$$

où :

$$\psi_{moyen} = \frac{1}{Z_\infty 2\pi} \int_0^{Z_\infty} \int_0^{2\pi} (\sin\theta + \cos\theta)(\cosh Z-1)\,d\theta dZ$$

L'existence de domaines où la fonction est nulle ($\theta = 3\pi/4$, $7\pi/4$) ne permet pas de calculer l'erreur relative.

Le test ($\mu_t = 10^{-3}$*) est relatif à un champ initial $\psi_n = 9/10\psi_e$. La sensibilité de la méthode (A.D.I.0) aux valeurs initiales est encore vérifiée ici.

En conclusion, cette étude comparative révèle des performances analogues, bien que la méthode spectrale ait une précision supérieure d'un facteur 2 sur le schéma A.D.I. optimisé.

III. EQUATIONS DE TRANSPORT DU TOURBILLON ET DE LA TEMPERATURE

La résolution des équations de transport (1) (3) est réalisée à l'aide du schéma implicite à directions alternées. Son principe exposé au § II.1.1. est ici appliqué à des équations de transport.

III.1. DECOUPLAGE NUMERIQUE DES FONCTIONS COURANT ET TOURBILLON

La procédure est classique. A l'instant $t = (n+1)\delta t$, la fonction tourbillon $\omega[(n+1)\delta t] = \omega^{n+1}$ est déterminée en considérant la fonction courant ψ^n déterminée à l'instant antérieur. La résolution de l'équation de continuité (2) est effectuée avec le champ tourbillon ω^{n+1}. Ces deux étapes constituent une itération complète.

Bien que le schéma A.D.I. conduise à une stabilité inconditionnelle dans la résolution d'équations linéaires (PEACEMAN, RACHFORD, 1955), l'application à des systèmes différentiels non linéaires (1)(2) fait apparaître une limitation du pas de temps δt.

III.2. RESOLUTION DE L'EQUATION DE TRANSPORT DU TOURBILLON

L'application du principe (§ II.1.1.) et du découplage numérique permet d'obtenir :

$$\frac{Re}{2}\left[E_Z \frac{\omega^{n+1/2}-\omega^n}{\delta t/2} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)^n \left(\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right)^{n+1/2}\right] - \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2}\right)^{n+1/2} =$$

$$\frac{Re}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\omega}{\partial Z}\right)^n + \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial Z^2}\right)^n \qquad (8a)$$

$$\frac{Re}{2}\left[E_Z \frac{\omega^{n+1}-\omega^{n+1/2}}{\delta t/2} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^n \left(\frac{\partial\omega}{\partial Z}\right)^{n+1}\right] - \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial Z^2}\right)^{n+1} =$$

$$\frac{Re}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^n \left(\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right)^{n+1/2} + \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2}\right)^{n+1/2} \qquad (8b)$$

Les valeurs $\omega^{n+1/2}$ n'ont pas de signification physique. Pour résoudre la demi-étape (8a), il doit être proposé des relations de compatibilité à la frontière (voir BONTOUX, 1978), en particulier :

$$\omega_\Gamma^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(\omega_\Gamma^n + \omega_\Gamma^{n+1}\right) \qquad (\Gamma : \text{frontière})$$

Or, lors de la résolution d'un problème réel, les valeurs du tourbillon à la paroi de l'obstacle (ω_p) sont inconnues. Il est donc impossible d'appliquer cette relation. Nous prendrons :

$$\omega_p^{n+1/2} = \omega_p^n$$

III.2.1. Discrétisation spatiale

Les relations (8A)(8b) sont approchées par un schéma aux différences finies (S.D.F) centré. Il vient au point courant P :

$$-\omega^{n+1/2}(O)\left[1+\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)^n(P)\right] + \omega^{n+1/2}(P)\left[2+\lambda E_Z\right]$$

$$-\omega^{n+1/2}(E)\left[1-\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)^n(P)\right] = S^n \qquad (9a)$$

$$- \omega^{n+1}(S)\left[1- \beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^{n}(P)\right] + \omega^{n+1}(P)\left[2 + \frac{\lambda}{\mu} E_Z\right]$$

$$- \omega^{n+1}(N)\left[1+ \beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^{n}(P)\right] = S^{n+1} \qquad (9b)$$

où :

$$S^n = \mu\left[\omega^n(S)\left[1- \beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^{n}(P)\right] + \omega^n(P)\left(\frac{\lambda}{\mu} E_Z - 2\right) + \omega^n(N)\left[1+ \beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^{n}(P)\right]\right]$$

$$S^{n+1} = \frac{1}{\mu}\left[\omega^{n+1/2}(0)\left[1+ \alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)^{n}(P)\right] + \omega^{n+1/2}(P)\left(\lambda E_Z - 2\right) + \omega^{n+1/2}(E)\left[1-\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)^{n}(P)\right]\right]$$

$$\alpha = \frac{1}{4}\,\delta\theta \cdot Re \qquad ; \qquad \beta = \frac{1}{4}\,\delta Z \cdot Re$$

$$\lambda = \frac{(\delta\theta)^2}{\delta t} \cdot Re \qquad ; \qquad \mu = \left(\frac{\delta\theta}{\delta Z}\right)^2$$

Nous obtenons ici encore un système linéaire tout à fait analogue à (5a) (5b). Il sera résolu par factorisation.

Nous rappelons que les termes de convection sont ici approchés par des schémas centrés, ainsi la précision spatiale est d'ordre $o(\delta\theta^2, \delta Z^2)$ Dans d'autres techniques de résolution, ces termes sont généralement approchés par des schémas décentrés "amont", d'ordre $o(\delta\theta, \delta Z)$. Soit par exemple à l'instant $t = (n+1)\delta t$:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)^{n}(P) \geqslant 0 \quad : \quad \left(\frac{\delta\omega}{\delta\theta}\right)^{n+1}(P) = \frac{\omega^{n+1}(P) - \omega^{n+1}(0)}{\delta\theta}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)^{n}(P) < 0 \quad : \quad \left(\frac{\delta\omega}{\delta\theta}\right)^{n+1}(P) = \frac{\omega^{n+1}(E) - \omega^{n+1}(P)}{\delta\theta}$$

Cette technique est utilisée dans les procédures qui font intervenir un cycle d'itérations internes pour résoudre (1) à chaque instant. En effet, elle sauvegarde les critères de stabilité tout en maintenant le caractère dominant de la diagonale.

Pour le schéma A.D.I., les critères de stabilité sont sauvegardés jusqu'à des nombres de Reynolds élevés (voir DEY, 1978), par les schémas centrés. DAUBE et al (1978) ont proposé un schéma décentré du second ordre. D'autres auteurs, SPALDING (1972), RUNCHALL (1972) proposent un schéma basé sur le nombre de Reynolds relatif à l'échelle de la maille Re_ℓ . Cette technique préconise un schéma centré lorsque $Re_\ell \leqslant Re_c$ où Re_c est un nombre de Reynolds critique, et lorsque $Re_\ell > Re_c$ un schéma où les termes de diffusion sont négligés. On trouvera dans un rapport interne (HA MINH, MARTINEZ, BOISSON, 1978) une étude comparative sur un problème test des divers schémas. HA MINH (1976) propose un schéma hybride qui maintient l'ordre de l'équation différentielle. Ainsi, nous proposons lorsque la stabilité du schéma A.D.I. centré est mise en défaut le schéma hybride suivant :

Soient $Re_{\ell\theta}$ et $Re_{\ell Z}$ les nombres de Reynolds à la maille, respectifs à la direction θ et Z :

$$Re_{\ell\theta} = 2\left|\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right| \cdot \alpha \qquad ; \qquad Re_{\ell Z} = 2\left|\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right| \cdot \beta$$

Les termes de convection sont approchés par des schémas centrés lorsque le nombre de Reynolds local est inférieur à une valeur critique Re_c, et par des schémas décentrés "amont" lorsque Re_ℓ est supérieur à Re_c.

Ainsi, il vient lorsque la direction θ est "débloquée" à l'instant $t = (n+1/2)\delta t$:

$$Re_{\ell\theta} < Re_c \qquad \text{relation (7a)}$$

$$Re_{\ell\theta} > Re_c$$

$$- \omega^{n+1/2}(O)\left[1+\alpha\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right| + \frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)^n(P)\right] + \omega^{n+1/2}(P)\left[2+E_Z.\lambda+ \alpha\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right|\right)^n(P)\right]$$

$$- \omega^{n+1/2}(E)\left[1-\alpha\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right| - \frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)^n(P)\right] = S^n \qquad (10)$$

où S^n est défini en (9a). L'expression relative au demi-pas suivant pour la direction Z est établie de manière identique.

III.2.2. Précision temporelle

La procédure (A.D.I.) permet d'assurer la précision temporelle au second ordre lorsque les termes de convection ont leurs coefficients $\delta\psi/\delta\theta$, $\delta\psi/\delta Z$ exprimés à l'instant en cours. Il a été proposé (voir étude bibliographique HA MINH, 1978) pour maintenir la précision temporelle d'ordre $\theta(\delta t^2)$, un algorithme basé sur un processus itératif interne pour passer de $t = n.\delta t$ à $t = (n+1)\delta t$. Il se décompose comme suit :

1°) Détermination de $\omega^{0,n+1}$ par les relations (9a) (9b)
2°) Détermination de $\psi^{0,n+1}$ avec le champ source $\omega^{0,n+1}$
3°) Retour à 1°) pour la détermination de $\omega^{1,n+1}$, dans lequel les coefficients de convection sont exprimés à l'aide de $\psi^{0,n+1}$

Le processus itératif prend fin lorsque :

$$\left|\omega^{k,n+1} - \omega^{k-1,n+1}\right|_{i,j} \leqslant \varepsilon_\omega \qquad \omega^{n+1} = \omega^{k,n+1}$$

$$k=1,.. \quad \text{alors} \quad \psi^{n+1} = \psi^{k,n+1}$$

et (ou) $$\left|\psi^{k,n+1} - \psi^{k-1,n+1}\right|_{i,j} \leqslant \varepsilon_\psi$$

Cet algorithme nécessite le stockage des valeurs ω^n et ψ^n ce qui double la capacité mémoire requise. Le temps de calcul est alourdi par la série d'itérations internes. Au vu de ces inconvénients nous avons opté pour la procédure A.D.I. simple qui découple les variables ψ, ω comme il a été exposé (§ II.1).

III.3. CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA FONCTION ROTATIONNEL

Les conditions de non perméabilité et d'adhérence du fluide à la paroi traduites par :

$$\psi(\theta,0) = \frac{\partial\psi(\theta,0)}{\partial Z} = 0$$

ne fournissent pas explicitement le comportement du rotationnel à la paroi ω_p. L'équation de continuité (2) se simplifie à la paroi :

$$\omega_p = \frac{\partial^2\psi}{\partial Z^2}\bigg|_{Z=0} \qquad \left(E_Z\Big|_{Z=0} = 1\right)$$

Plusieurs relations, toutes basées sur le développement de Taylor des fonctions ψ et ω à la paroi sont proposées pour expliciter la relation précédente. Le degré de précision de ces relations doit être le même que celui des équations discrètes dans le champ, à savoir $o(\delta Z^2, \delta\theta^2)$

Nous avons utilisé la relation de WOOD (voir annexe II)

$$\omega_p = \{\frac{3}{(\delta Z)^2}(\psi_{i,2} - \psi_{i,p}) - \frac{1}{2}\omega_{i,2}\}/(1+\delta Z) + \theta(\delta Z^2)$$

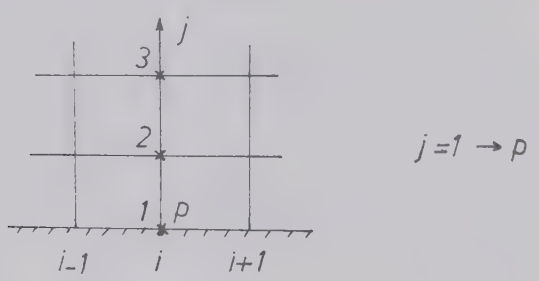


Figure 5

Ainsi la relation (9b) s'écrit au point P voisin de la paroi (j = 2)

$$\omega^{n+1}(P)\{2+\lambda E_Z + \frac{1}{(1+\delta Z)}[1-\beta(\frac{\partial\psi}{\partial\theta})^n(P)]\} - \omega^{n+1}(N)[1+\beta(\frac{\partial\psi}{\partial\theta})^n(P)] =$$

$$S^{n+1} + 3(\psi^n(P) - \psi_p^n).[1-\beta(\frac{\partial\psi}{\partial Z})^n(P)]/\delta Z^2(1+\delta Z)$$

Pour la condition à la frontière extérieure ($\omega(\theta,Z_\infty) = \omega_\infty$) nous avons imposé une condition de type gradient. Elle correspond à la solution à l'ordre 1 de l'écoulement d'Oseen déterminée par COLE et ROSHKO (voir § II.1). Nous donnons dans le (§ III.3.1.) l'application numérique de cette solution.

III.4. EQUATION DE LA TEMPERATURE

La détermination de la température T est réalisée de façon analogue à la fonction rotationnel. Elle se fait après avoir déterminé la fonction courant à l'instant $t = (n+1)\delta t$. Ainsi, il vient :

$$-[1+\alpha'(\frac{\partial\psi}{\partial Z})^{n+1}_{(P)}]T^{n+1/2}_{(O)}+[2+\lambda' E_Z]T^{n+1/2}_{(P)}-[1-\alpha'(\frac{\partial\psi}{\partial Z})^{n+1}_{(P)}]T^{n+1/2}_{(E)}=S'^{n} \quad (11a)$$

$$-[1+\beta'(\frac{\partial\psi}{\partial\theta})^{n+1}_{(P)}]T^{n+1}_{(S)}+[2+\frac{\lambda'}{\mu}E_Z]T^{n+1}_{(P)}-[1+\beta'(\frac{\partial\psi}{\partial\theta})^{n+1}_{(P)}]T^{n+1}_{(N)}=S'^{n+1} \quad (11b)$$

où

$$S'^{n}=\mu\{[1-\beta'(\frac{\partial\psi}{\partial\theta})^{n+1}_{(P)}]T^{n}_{(S)}+[\frac{\lambda'}{\mu}E_Z-2]T^{n}_{(P)}+[1+\beta'(\frac{\partial\psi}{\partial\theta})^{n+1}_{(P)}]T^{n}_{(N)}\}$$

$$S'^{n+1}=\frac{1}{\mu}\{[1+\alpha'(\frac{\partial\psi}{\partial Z})^{n+1}_{(P)}]T^{n+1/2}_{(O)}+[\lambda' E_Z-2]T^{n+1/2}_{(P)}+[1-\alpha'(\frac{\partial\psi}{\partial Z})^{n+1}_{(P)}]T^{n+1/2}_{(E)}\}$$

$$\alpha' = \frac{1}{4}\delta\theta Pe \quad ; \quad \beta' = \frac{1}{4}\delta Z Pe$$

$$\lambda' = \frac{\delta\theta^2}{\delta t} Pe \quad ; \quad \mu = (\frac{\delta\theta}{\delta Z})^2 \quad ; \; Pe = Re.Pr \text{ : nombre de Péclet}$$

III.4.1. Conditions aux limites

La température à la paroi du cylindre est maintenue constante, égale à l'unité, en valeur adimensionnelle. A la frontière extérieure une

condition de type gradient analogue au rotationnel est utilisée. Elle correspond à la solution à l'ordre 1 de l'écoulement d'Oseen comme il a été démontré par DENNIS et al (1968) (voir §. II.3.1.)

En effet il ne semble pas réaliste d'imposer la condition de Dirichlet : $T_\infty \equiv 0$. Lorsqu'on progresse dans le temps, jusqu'à atteindre la frontière extérieure par le sillage thermique en maintenant $T_\infty \equiv 0$, il apparaît une discontinuité pour les lignes correspondant à $\theta = \pi$. Celle-ci est révélée sur le test numérique de la figure 6 où nous avons imposé cette condition.

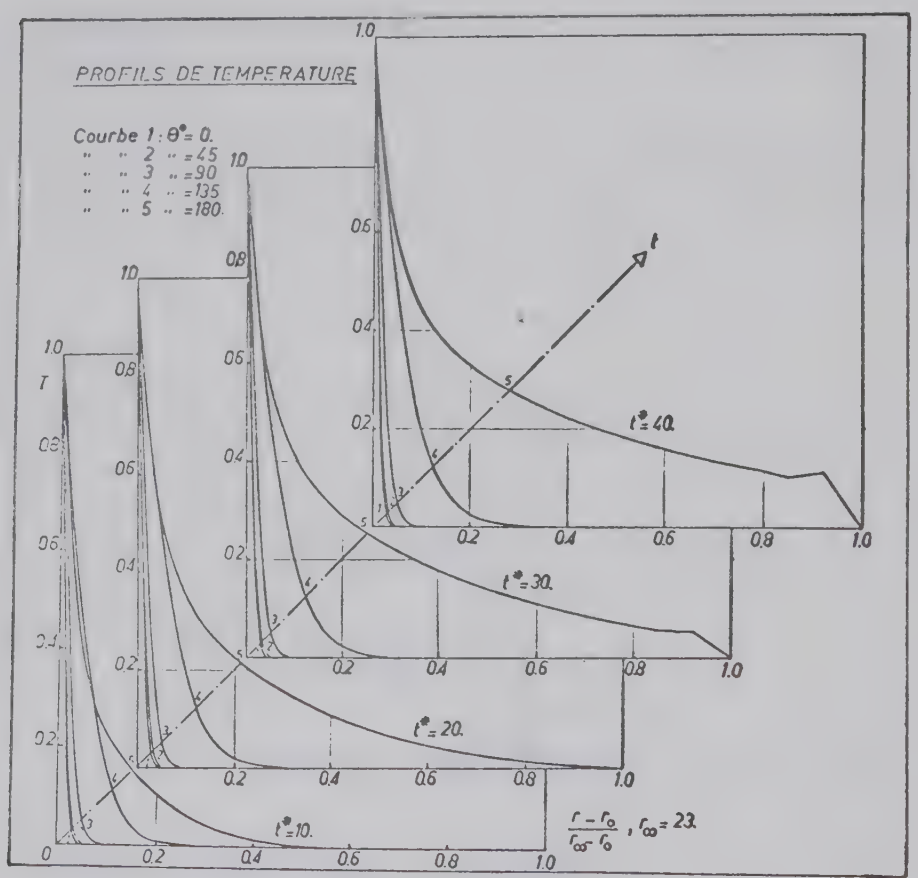


Figure 6 : Comportement du sillage thermique lorsque l'on impose $T_\infty \equiv 0$. $Re = 40$, $Pr = 0.73$

La solution d'Oseen à l'ordre 1 du rotationnel ω ou de la température T, est : (chap. II)

$$\phi(Z,\theta) \sim G(\theta)\exp[-\chi(\cos\theta-1) - \frac{1}{2} Z] \qquad r = e^{Z} >> 1 \text{ (COLE et ROSHKO)}$$

où $\chi = \frac{1}{4} Re\ e^{Z}$ si $\phi = \omega$

$\chi = \frac{1}{4} Re.Pre^{Z}$ si $\phi = T$

La fonction $G(\theta)$ n'est pas connue explicitement. Mais après une manipulation algébrique, nous pouvons relier la valeur de $\phi(Z_{max},\theta)$ à la valeur $\phi(Z_{max-1},\theta)$ où Z_{max-1} est le point voisin antérieur à la frontière extérieure :

$$\phi(Z_{max},\theta) = H(Z_{max-1},\theta) \cdot (Z_{max-1},\theta)$$

avec : $$H(Z_{max-1},\theta) = \exp[-(\chi_{max}-\chi_{max-1})(\cos\theta+1) - \frac{1}{2}(Z_{max}-Z_{max-1})]$$

La figure 6' donne l'allure de la variation de la fonction H. Cette relation impose à la frontière extérieure une valeur asymptotiquement nulle, excepté sur la zone de sillage proche de la ligne $\theta = \pi$ où elle définit une condition de type gradient non nul.

Cette relation sera utilisée comme condition limite à la frontière extérieure pour la fonction rotationnel et la fonction température.

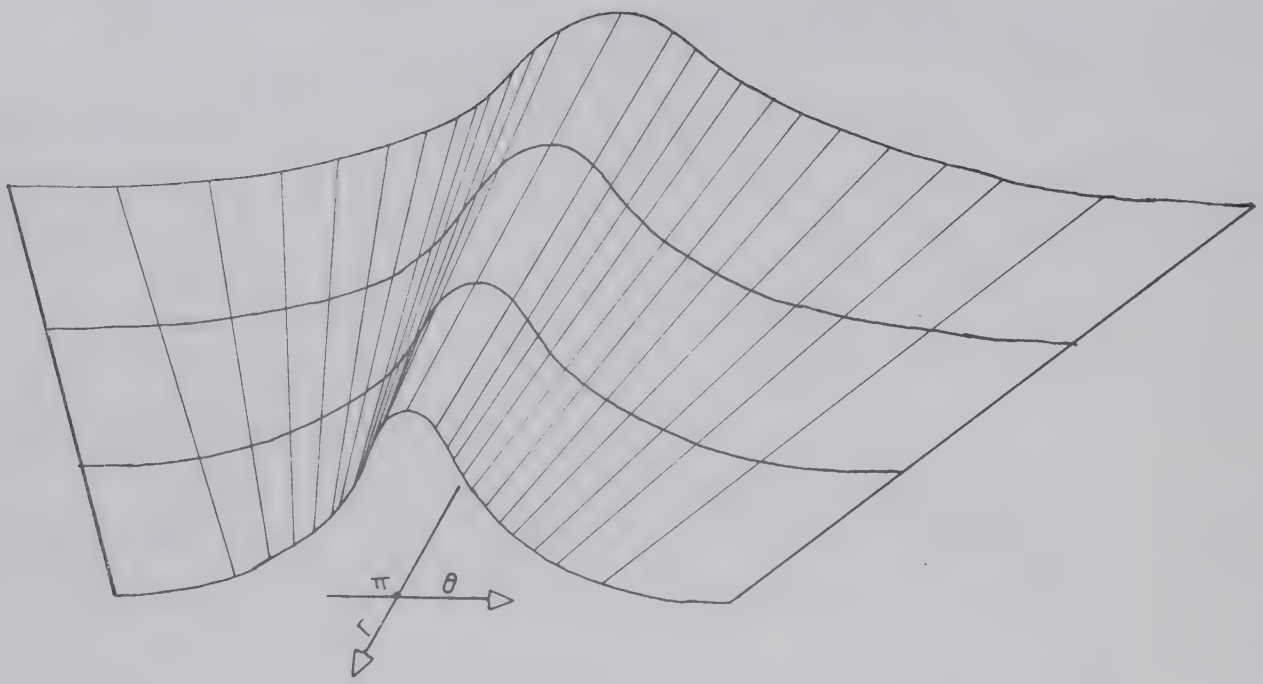
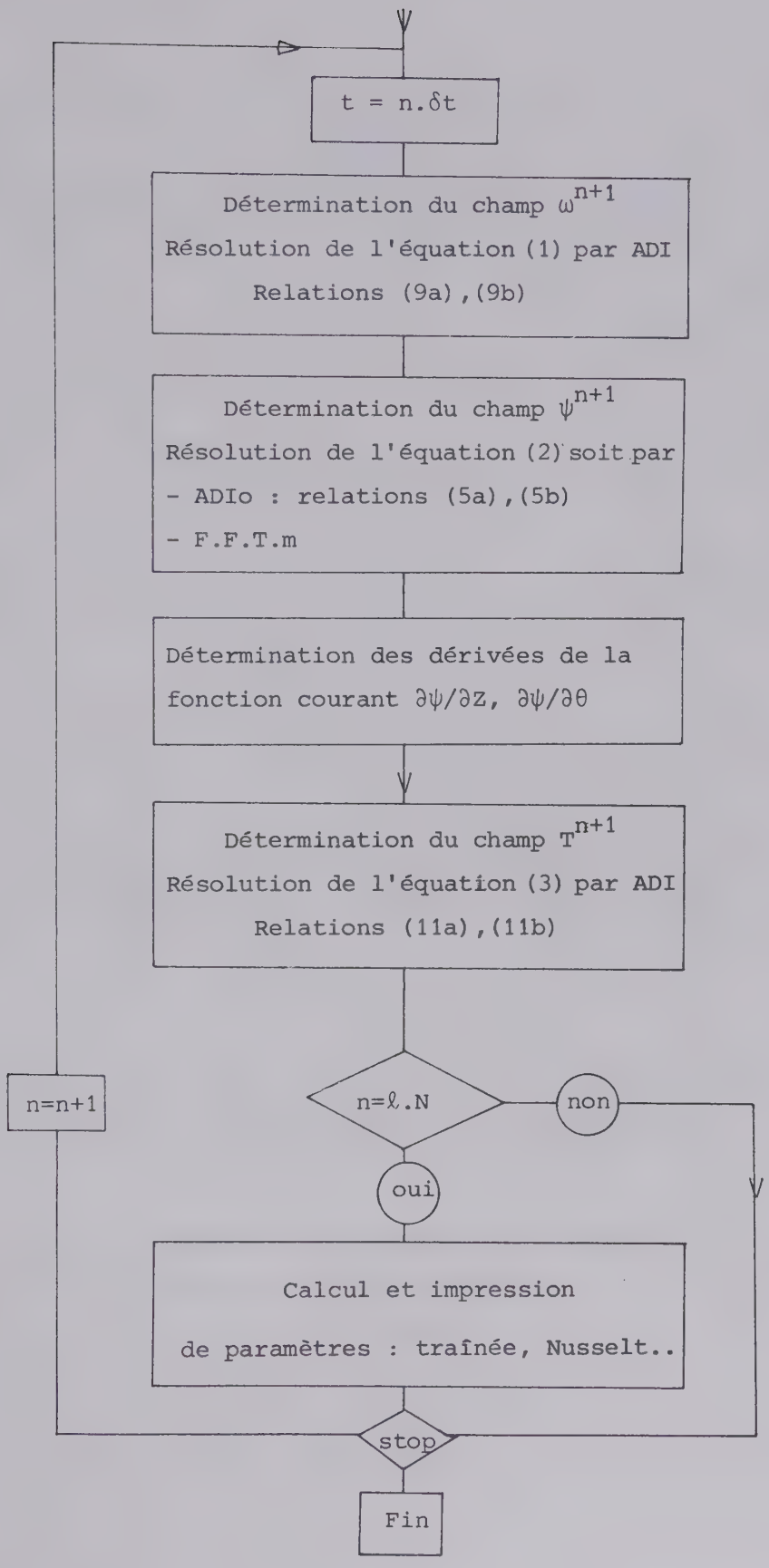


Figure 6' : Allure de la variation de la fonction :

$$H(Z_{max},\theta)=\exp[-(\chi_{max}-\chi_{max-1})(\cos\theta+1)-\frac{1}{2}(Z_{max}-Z_{max-1})]$$

IV. SCHÉMA DE L'ALGORITHME DE CALCUL DU SYSTEME DIFFERENTIEL

Nous allons résumer les principales étapes du code de calcul.


t = n.δt
Détermination du champ ω^{n+1}
Résolution de l'équation (1) par ADI
Relations (9a),(9b)
Détermination du champ ψ^{n+1}
Résolution de l'équation (2) soit par
- ADIo : relations (5a),(5b)
- F.F.T.m
Détermination des dérivées de la fonction courant ∂ψ/∂Z, ∂ψ/∂θ
Détermination du champ T^{n+1}
Résolution de l'équation (3) par ADI
Relations (11a),(11b)
n=ℓ.N
non
oui
n=n+1
Calcul et impression
de paramètres : traînée, Nusselt..
stop
Fin

V. EXEMPLE DES PERFORMANCES DE L'ALGORITHME COMPLET DE CALCUL

L'étude a été réalisée en résolvant les équations (1) et (2) en appliquant le code de calcul A.D.I.o et F.F.T.m à l'équation de continuité (2), le code A.D.I. à l'équation (1).

L'écoulement symétrique à $Re = 40$ a été résolu jusqu'à 100 pas de temps, la propriété de symétrie de l'écoulement n'a pas été utilisée.

Paramètres de discrétisation :

$\delta t = 0,025$; $\delta\theta = \delta Z = \pi/32$; $I \times J = 64 \times 43$

$Z_\infty = 4,123$ soit $r_\infty = 61,76$

Les résultats de cette étude ont donné lieu à une communication (CANCAM 79 : G. MARTINEZ, H. BOISSON, 1979).

Sur les figures 7 et 8 sont consignées les évolutions de la traînée totale Cx (A.2) et de l'angle de décollement θ_d, ainsi que les écarts respectifs entre les deux solutions numériques.

$$\left(\frac{\Delta}{Cx}\right)\% = \frac{|Cx(A.D.I.o) - Cx(F.F.T.m)|}{1/2(Cx(A.D.I.o)+Cx(F.F.T.m)} \cdot 100$$

$$\left(\frac{\Delta}{\theta d°}\right)\% = \frac{|\theta d(A.D.I.o) - \theta d(F.F.T.m)|}{1/2(\theta_d(A.D.I.o)+\theta_d(F.F.T.m)} \cdot 100$$

Les deux méthodes donnent des résultats très proches ($o(0,15\%)$) sur un paramètre (Cx) qui rend compte de l'ensemble de l'écoulement.

Le temps de calcul total pour le maillage (64 x 43) est de 57 secondes pour le code A.D.I.o ($\mu_t = 10^{-3}$) et de 39 secondes pour le code F.F.T.m. pour effectuer 100 pas de temps ($t_{final} = 2,5$). Le calculateur utilisé est un IBM 370/168.

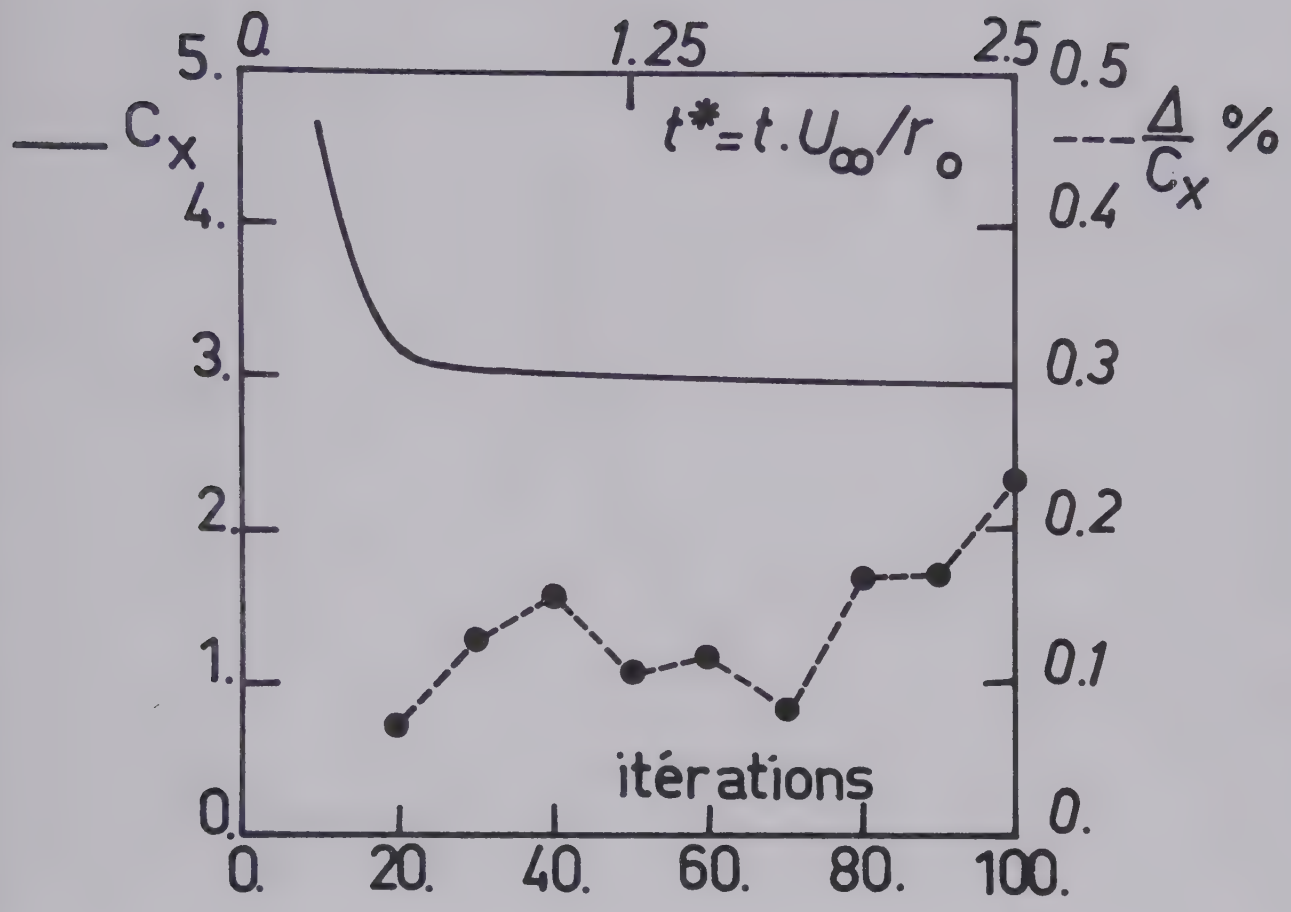


Figure 7 : Comparaison des résultats des codes (A.D.I.o.) et (F.F.T.m.) pour la traînée de l'écoulement symétrique.

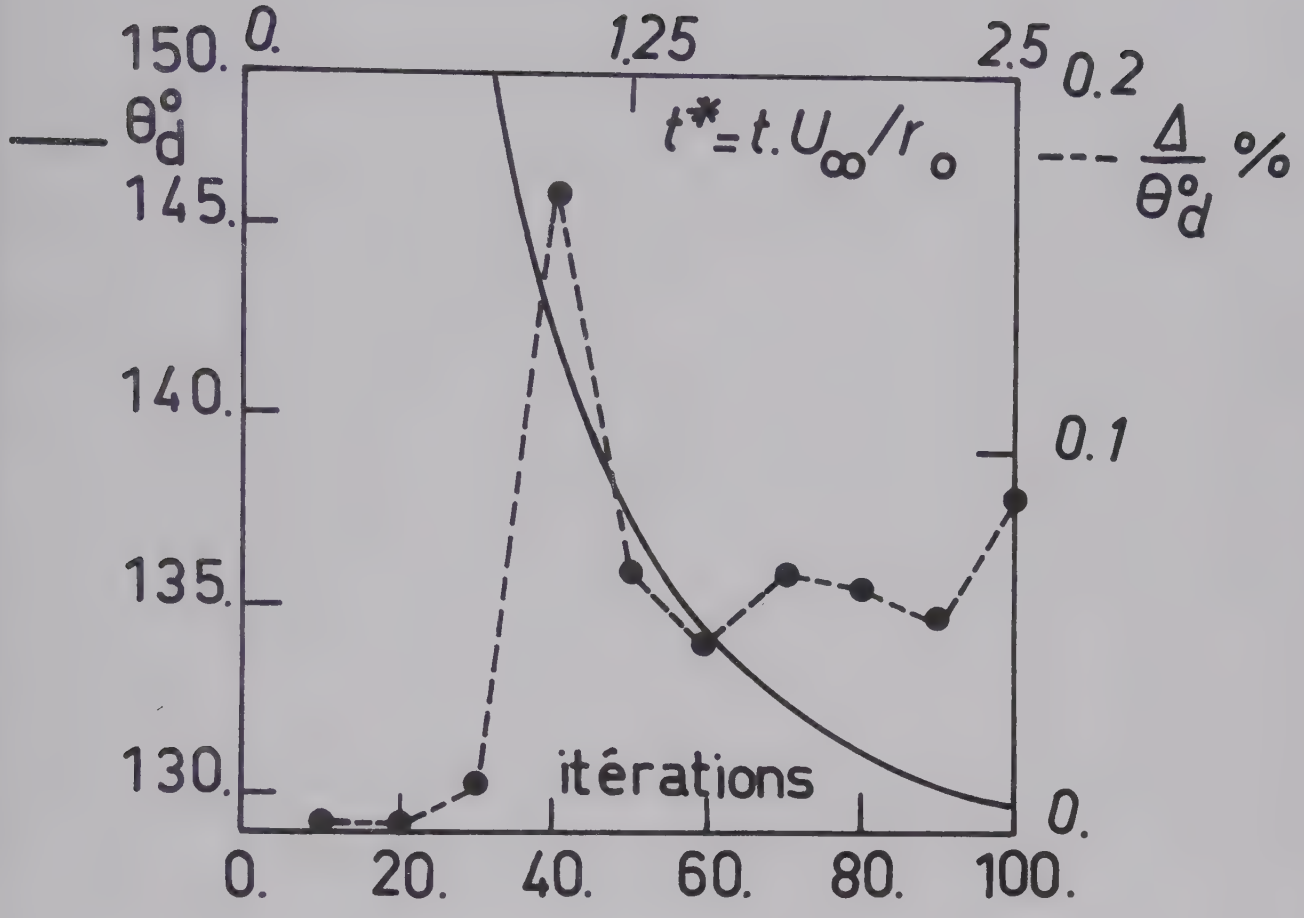


Figure 8 : Comparaison des résultats des codes (A.D.I.o.) et (F.F.T.m.) pour l'angle de l'écoulement symétrique.

CHAPITRE V

ECOULEMENT SYMETRIQUE

CHAPITRE V

ECOULEMENT SYMETRIQUE

I. INTERET DE L'ETUDE

Ce régime d'écoulement a déjà fait l'objet de beaucoup d'études. L'existence de nombreuses données relatives au champ dynamique fait que le calcul de cet écoulement peut être considéré comme un problème test. C'est, en tout cas, en ce sens que nous présentons la comparaison des résultats de cette étude avec les récents travaux publiés aussi bien sur le plan numérique qu'expérimental.

II. ETUDE DES PARAMETRES DE DISCRETISATION NUMERIQUE

II.1. PAS DE TEMPS

L'analyse linéaire établit, pour la procédure A.D.I., une stabilité inconditionnelle (cf. Chap. IV). Cependant, la résolution des équations de transport et de continuité (IV.1 - IV.2) fait apparaître des instabilités (BONTOUX et al, 1978). Une étude expérimentale sommaire a été réalisée pour assurer la stabilité.

De plus, nous avons cherché à synchroniser le temps numérique et le temps physique. En effet, si dans l'écoulement symétrique, seule la résolution stationnaire est recherchée, dans l'écoulement non permanent, avec allée tourbillonnaire, le code de calcul doit posséder une échelle de temps correcte, pour rendre compte de l'instationnarité interne propre à ce régime.

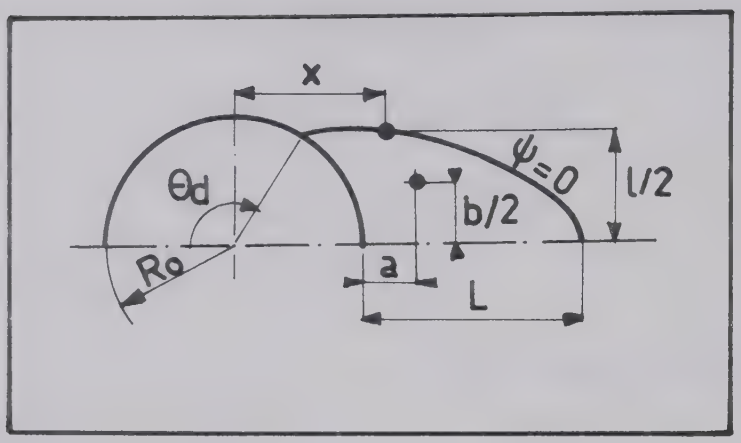


Figure 1 : paramètres géométriques des tourbillons attachés

Sur la figure 2 nous avons porté l'évolution de la longueur de recollement L/r_o en fontion du temps, pour Re = 40 et 20. La comparaison s'avère en bon accord avec l'expérience de COUTANCEAU et al, 1977).

On trouvera dans le tableau I, les valeurs des pas de temps adoptées.

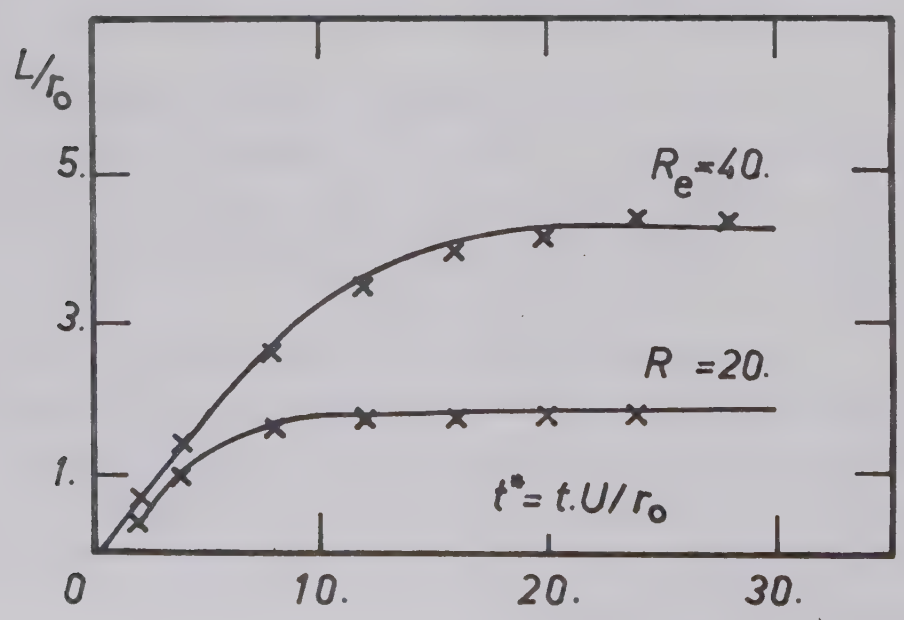


Figure 2 : évolution de la longueur de recollement en fonction du temps. x : expérimental, COUTANCEAU (1977) ; —— : cette étude.

	Nombre de Reynolds Re	Pas spatiaux $\delta\theta$, δZ	Frontière Extérieure R_∞	Nombre d'inconnues numériques	Pas de temps dynamique δt_d	Pas de temps thermique δt_t	C.P.U./ itération (secondes)	C.P.U. total secondes Temps numérique
Ecoulement Symétrique	5	$\pi/32$	23,141	3071	0,01	0,02	0,2348	235 T=10
	20	$\pi/32$	82,919	4337	0,05	0,10	0,3319	199 T=30
	40	$\pi/32$	82,919	4337	0,05	0,10	0,3319	199 T=30
	100	$\pi/32$	82,919	4337	0,05	0,10	0,3319	531 T=80
Allée tourbillonnaire	100	$\pi/45$	82,919	17010	0,05	0,10	1,4197	1703 T=60
	200	$\pi/45$	82,919	17010	0,05	0,10	1,4197	1703 T=60

Tableau I : Récapitulatif des paramètres de discrétisation, des temps de calcul (C.P.U.) des principales simulations numériques effectuées. (Calculateur IBM 370/168)

II.2. DISCRETISATION SPATIALE

L'influence de la taille des pas spatiaux qui détermine l'ordre de précision a fait l'objet d'expériences numériques. Un compromis entre précision et temps de calcul a été établi. Ainsi, pour Re = 20, les coefficients de traînée Cx, déterminés avec deux pas $\pi/32$ et $\pi/40$ ne diffèrent que de 1,5 %.

Remarque : Généralement, précision et stabilité sont antagonistes. La diminution du pas spatial entraîne obligatoirement celle du pas de temps pour un nombre de Reynolds fixé. Nous avons bien remarqué que pour maintenir la stabilité, le pas de temps, pour les faibles nombres de Reynolds diminue. Par contre, les autres régimes étudiés (Re = 40, 100, 200) ont pu être déterminés avec un même pas de temps $\delta t = 0{,}05$ pour des pas spatiaux de $\delta\theta = \delta = \pi/32, \pi/45$.

II.3. INFLUENCE DE LA LOCALISATION DE LA FRONTIERE EXTERIEURE NUMERIQUE

Nous rappelons que la résolution numérique impose de fixer la frontière extérieure à une distance finie (r_∞). Cette condition conduit

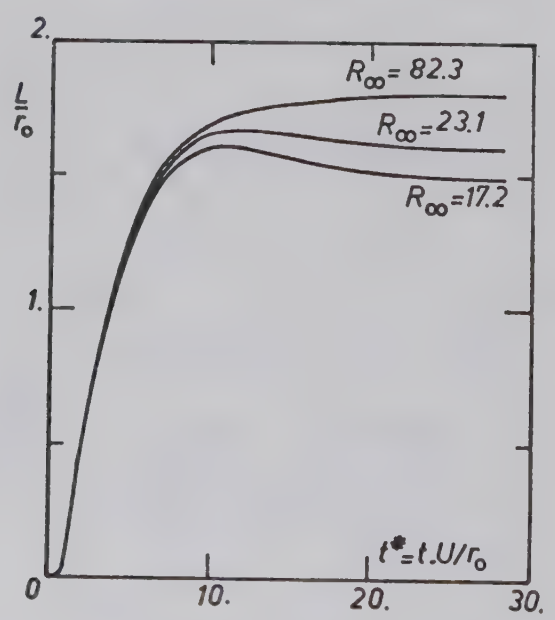


Figure 3 : influence de la frontière extérieure sur la longueur de recollement L/r_o. Re = 20.

à une sorte de confinement de l'écoulement d'autant plus sensible que les conditions aux limites extérieures sont proches de l'obstacle (figure 3). Il est donc nécessaire de rechercher une valeur de r_∞ qui rende l'écoulement simulé indifférent à ce paramètre.

Sur le tableau I sont résumés, avec d'autres résultats, les paramètres de discrétisation finalement adoptés.

III. RÉSULTATS SUR LE CHAMP DYNAMIQUE

Notre analyse porte essentiellement sur trois aspects : évolution du régime transitoire vers l'état stationnaire (longueur de recollement L/r_o, coefficients de traînée), valeurs ponctuelles (rotationnel à la paroi ω_p, pression à la paroi P, vitesse axiale arrière) et paramètres globaux de l'écoulement stationnaire pour $\mathcal{R}e$ = 5, 20, 40, 100.

III.1. EVOLUTION DU REGIME TRANSITOIRE EN FONCTION DU TEMPS

Au démarrage, l'organisation de l'écoulement subit une forte variation comme on peut le voir à travers les paramètres de longueur de recollement L/r_o, et de traînée Cx (figures 4, 5) suivie d'une période à évolution modérée, pour atteindre ensuite l'état stationnaire. Cet état d'équilibre est atteint d'autant plus rapidement que le nombre de Reynolds est faible. L'angle de décollement θ_d tend rapidement vers sa valeur finale, alors que le coefficient de traînée est le paramètre qui tend à se stabiliser en dernier. Le décollement apparaît à t = 0,6 ; 0,9 ; 1,2 respectivement pour $\mathcal{R}e$ = 100, 40, 20 alors qu'il ne se produit pas pour $\mathcal{R}e$ = 5. Ce dernier régime bien que différent du régime de Stokes ($\mathcal{R}e < 1$) ne possède donc pas de zone de recirculation ; les lignes de courant épousent la forme de l'obstacle. Les faibles vitesses qui règnent aux points en aval, voisins de la paroi [$o(10^{-3})$] conduisent à conclure qu'il est à la limite du décollement localisé à $\mathcal{R}e \sim 5$ à 6 selon d'autres auteurs.

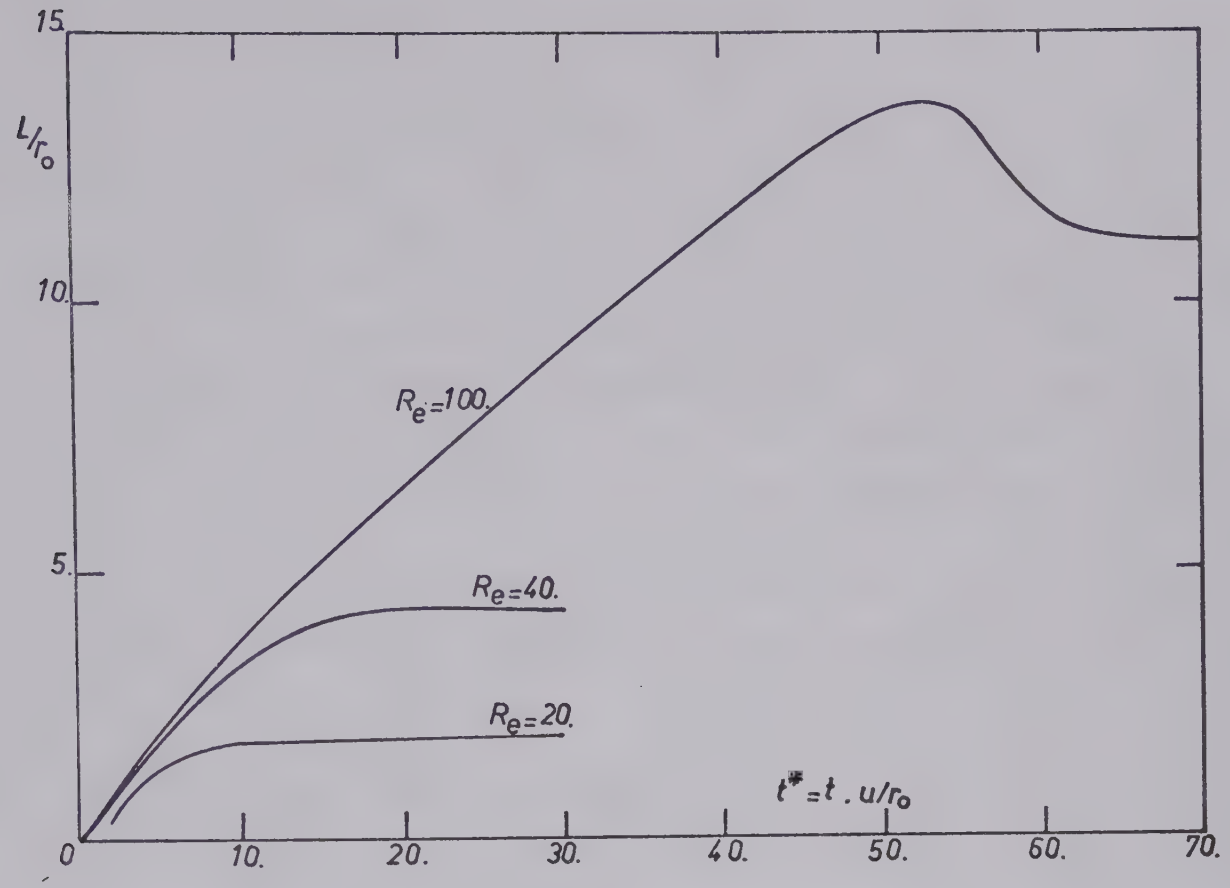


Figure 4 : évolution de la longueur de recollement L/r_o en fonction du temps pour différents régimes

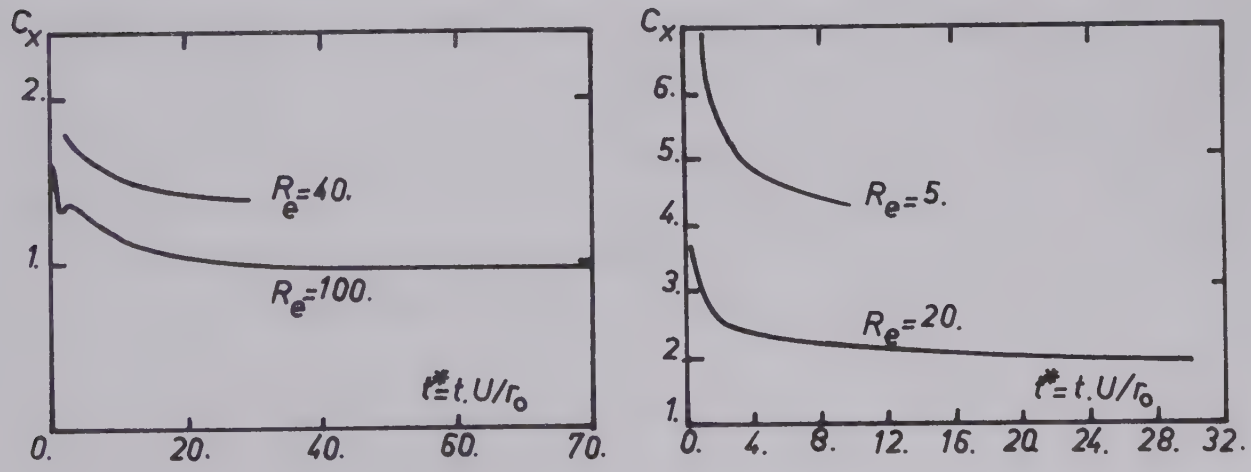


Figure 5 : évolution dans le temps du coefficient de traînée Cx

Le régime stationnaire est atteint pour Re = 100 au temps t = 80. Il est important de souligner que cela n'avait pu être obtenu par d'autres auteurs qui traitaient également les équations instationnaires, particulièrement FROMM et HARLOW (1969), JAIN et RAO (1969), KLIFFE et al (1978), et avait conduit à conclure à la supériorité de la résolution des équations stationnaires par rapport au traitement des équations instationnaires selon DENNIS et CHANG (1972). Or, d'un point de vue mathématique, la solution d'équations définies avec des conditions aux limites stationnaires doit tendre asymptotiquement vers un régime unique et stable.

Notre résultat témoigne, nous semble-t-il, de la maîtrise du couplage des équations du mouvement et d'un traitement adéquat des conditions aux limites.

III.2. VALEURS PONCTUELLES

- Pression à la paroi

La pression réduite $(P-P_o)/\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ est portée sur la figure 6. La référence étant prise au point d'arrêt amont. L'existence d'un domaine à faible variation au culot pour Re = 20, 40, 100 traduit que la pression qui règne dans les zones de recirculation est sensiblement constante. Pour Re = 5, le décollement n'existe pas, la zone de palier est absente. Le coefficient de pression de culot Cp tend à augmenter lorsque Re croît, ce qui témoigne également de l'augmentation de l'intensité du champ de vitesse dans la zone de recirculation comme l'indique la figure 7. Il est à remarquer que le coefficient Cp pour Re = 100 est proche de la valeur obtenue à grand nombre de Reynolds (Cp $\simeq$ 0,7).

- Répartition du rotationnel à la paroi

Le tourbillon à la paroi (figure 8) qui est diffusé puis convecté détermine le champ rotationnel dans tout le domaine. Il conditionne donc la structure de l'écoulement. Cette grandeur n'est accessible expérimentalement que par des mesures sophistiquées (DIMOPOULOS et al,1968).

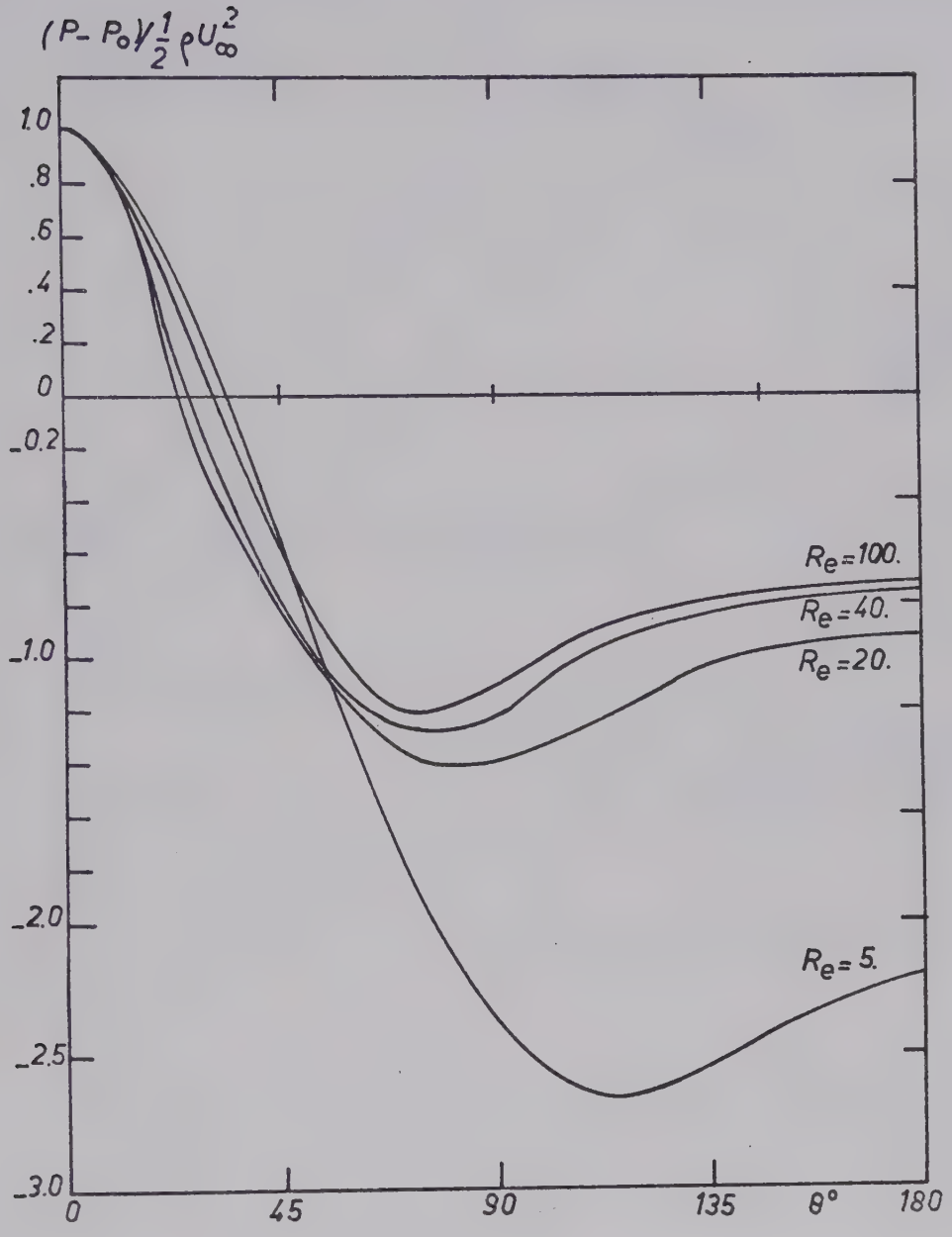


Figure 6 : Pression à la paroi

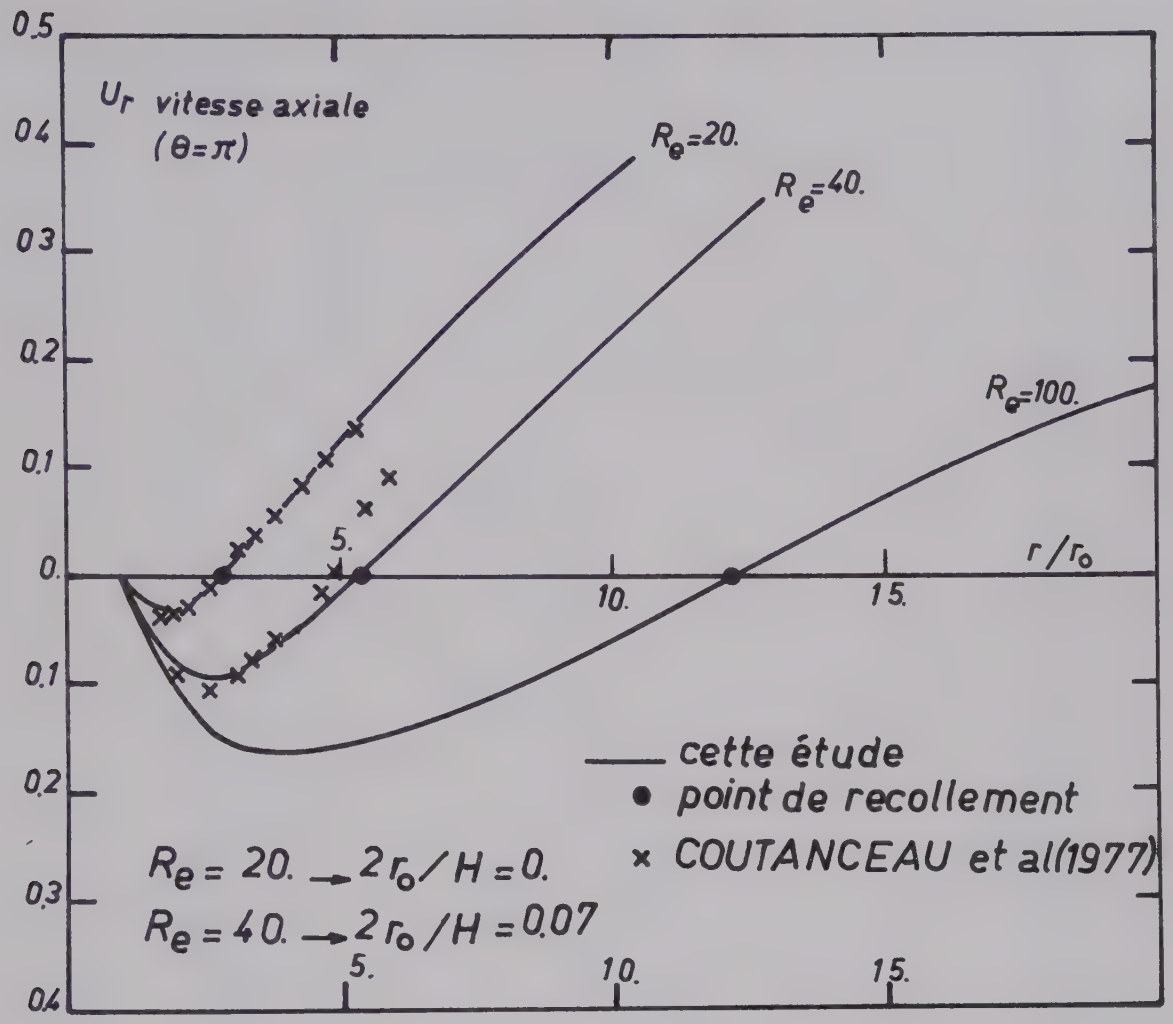


Figure 7 : vitesse axiale arrière pour l'écoulement décollé.

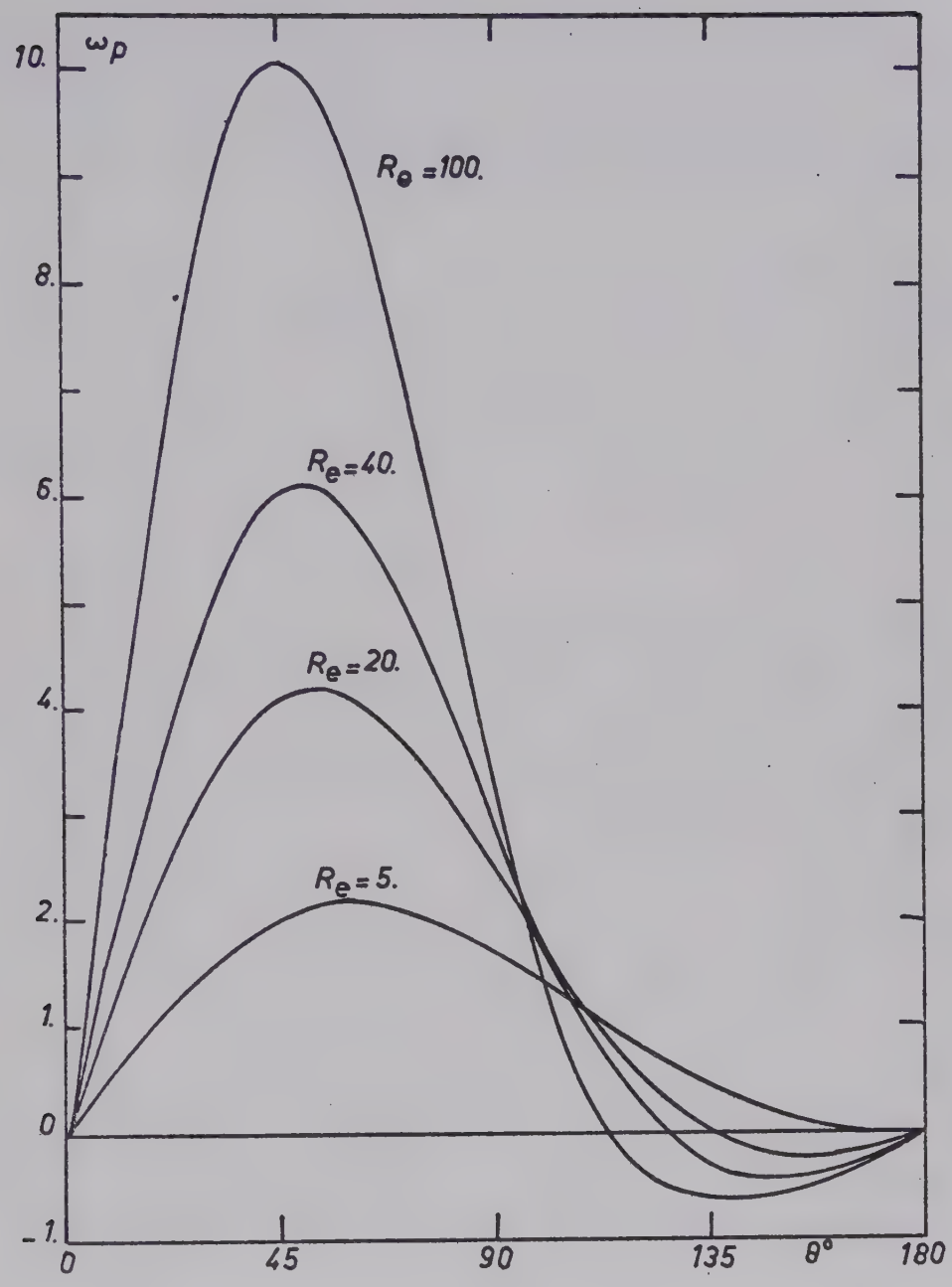


Figure 8 : répartition du rotationnel à la paroi

La comparaison avec ces auteurs diffère sensiblement. Ainsi pour $Re = 100$, ils ont déterminé $\omega_p max = 12,24$ à $\theta = 50°$ alors que nous avons trouvé $\omega_p max = 10,10$ à $\theta = 45°$. Leur écoulement n'est pas stabilisé, c'est un régime avec allée tourbillonnaire pour lequel nous avons déterminé $\omega_p max = 10,80$.

Le tourbillon à la paroi qui traduit les forces de viscosité exercées sur l'obstacle détermine la traînée visqueuse Cx_v (annexe III).

La comparaison de nos résultats se fera par l'intermédiaire de la traînée totale $Cx = Cx_p + Cx_v$, portée sur la figure 9b.

III.3. PARAMETRES GLOBAUX

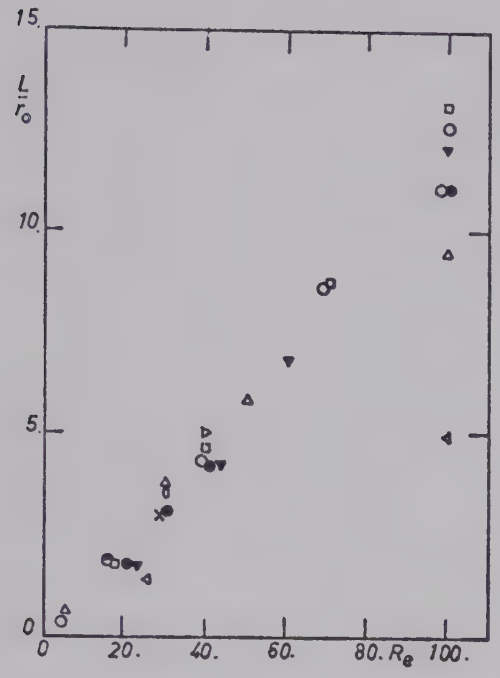
Les trois paramètres : longueur de recollement L/r_o, angle de décollement, coefficient de traînée permettent de bien définir l'écoulement symétrique décollé. La figure 9(a,b,c) résume nos résultats et montre la comparaison avec d'autres auteurs. Rappelons que pour $Re = 100$ la comparaison est faite avec des résultats numériques obtenus par traitement d'équations stationnaires pour les travaux cités en référence.

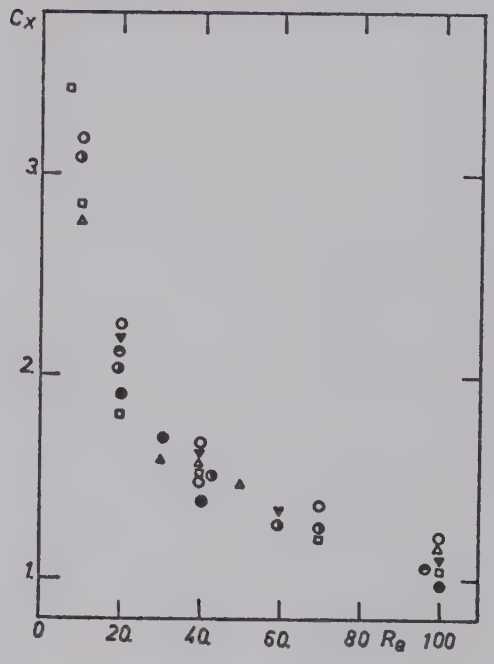
Nos résultats sont en très bon accord aved ceux de TUANN et OLSON (1978) qui ont utilisé la technique des éléments finis.

La simulation de l'écoulement symétrique pour $Re = 100$ qui n'existe pas physiquement sans plaque de recollement (ACRIVOS et al, 1965) conduit à une traînée Cx plus faible que la traînée correspondant au régime avec allée tourbillonnaire ($Cx = 1,30$). La stabilisation de l'écoulement contribue à diminuer les forces exercées sur l'obstacle.

III.4. VISUALISATION NUMERIQUE DE L'ECOULEMENT

Nous avons élaboré des programmes numériques qui permettent de calculer les lignes de niveau et le champ de vitesse, et de les restituer sur table traçante. Sur les figures 10, 11a, 11b, nous avons représenté les lignes de courant, les lignes iso-vorticité et le champ de vitesse pour $Re = 20$ et 100. Elles mettent en évidence la forme de la





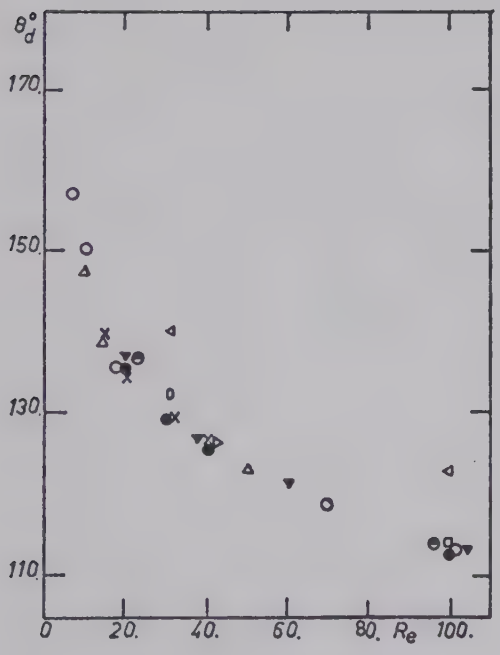


Figure 9 : Résultats numériques de l'écoulement symétrique en fonction de Re et comparaison avec d'autres auteurs.

a) L/r_o : longueur de recollement

b) Cx : traînée

c) θ_d : angle de décollement.

Num.	● cette étude	
	□ Dennis-Chang	
	△ Hamielec	
	○ Tuann-Olson	
	▼ Ta Phuoc Loc	
	▯ Thoman Szewczyk	
	▷ Son Hanratty	
	◓ Ha Minh	d/h
Exp.	◑ Tritton	
	x Coutanceau et al.	∞
	◁ Grove et al	0.02

10 a

10 b

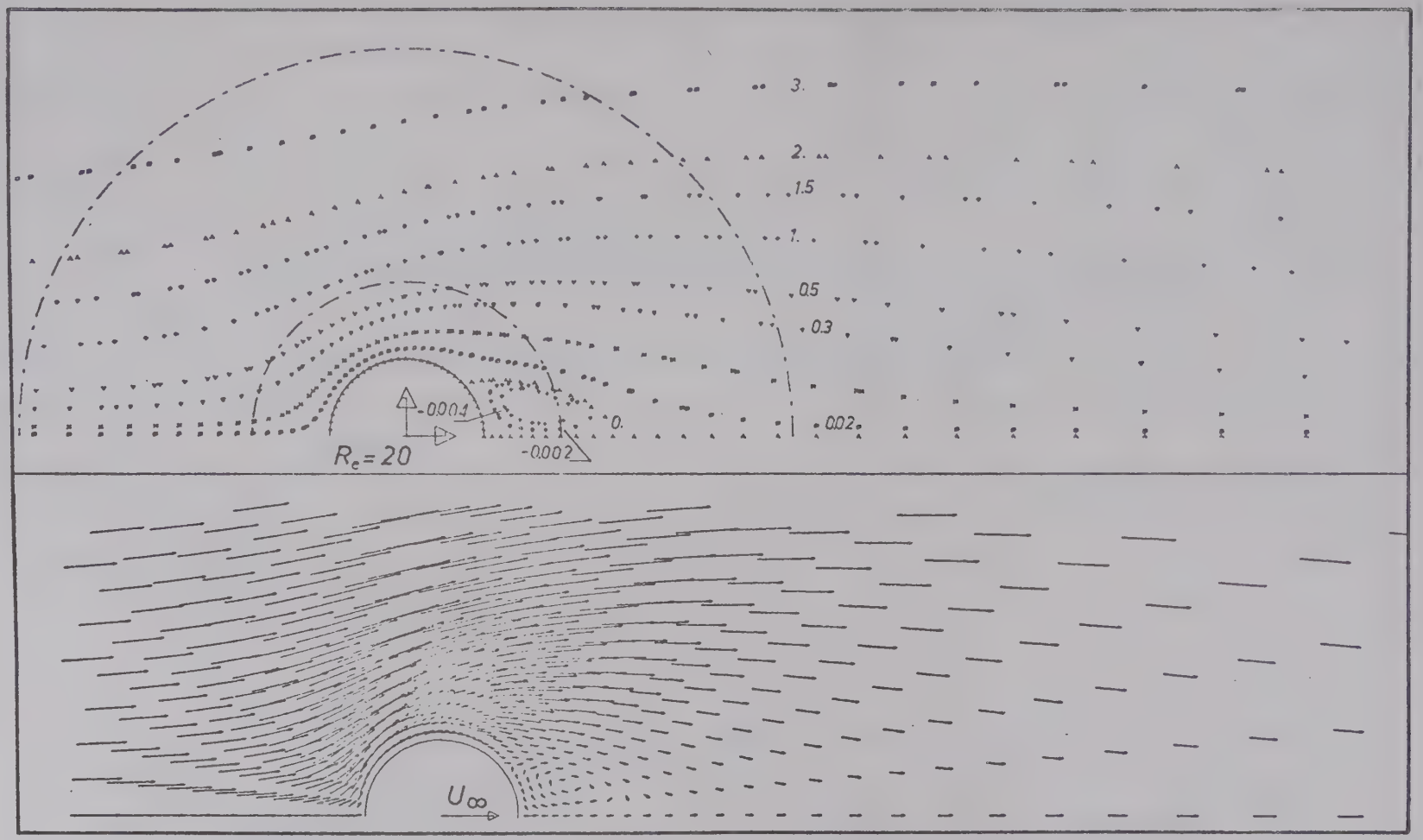
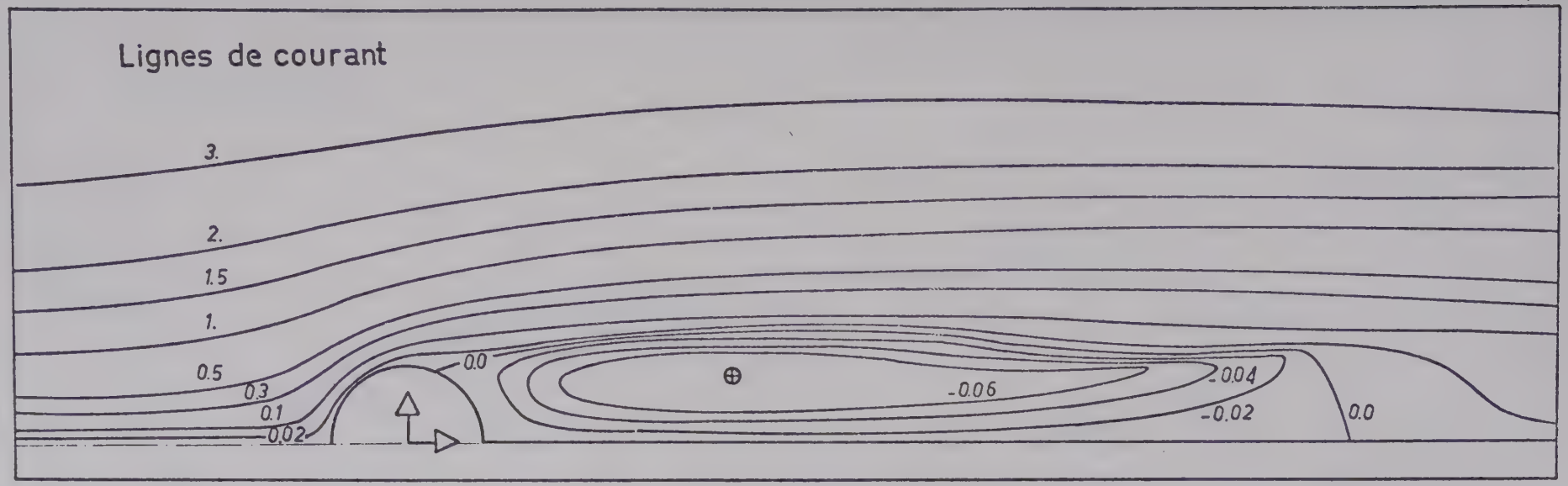


Figure 10 : Visualisation numérique de l'écoulement à Re = 20.
a) Lignes de courant
b) Champ de vitesses



11.a

Re =100

11.b

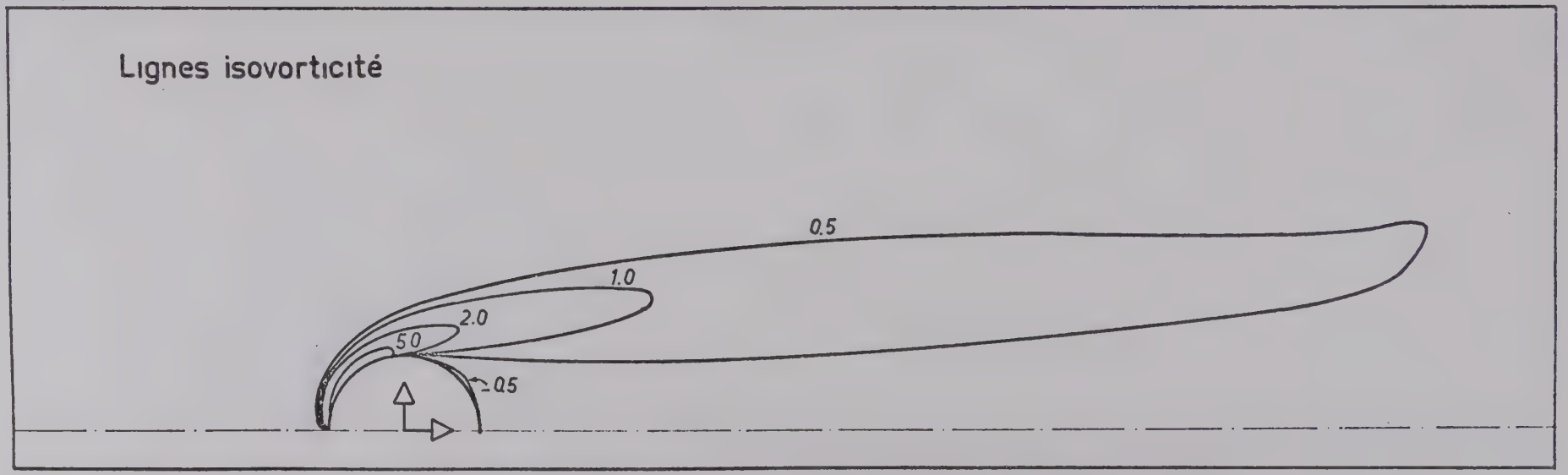


Figure 11

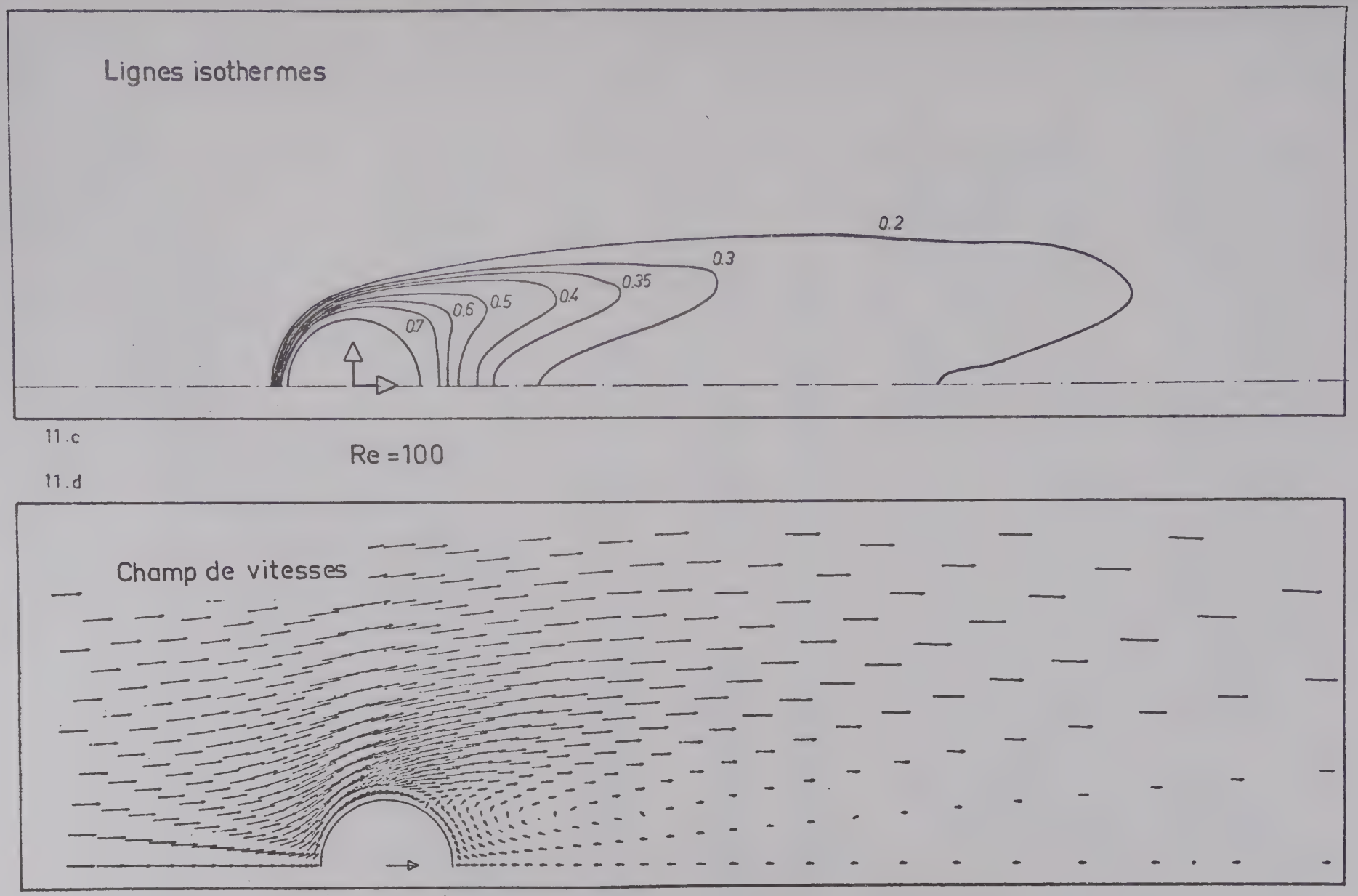


Figure 11 : Visualisation de l'écoulement symétrique à Re = 100. a) Lignes de courant, b) Lignes isovorticité, c) Lignes isothermes, d) Champ de vitesses.

zone de recirculation ou tourbillons attachés. Sur le tableau II une étude comparative des paramètres géométriques des tourbillons attachés est faite pour Re = 20 avec les résultats de COUTANCEAU et al (1977) déterminés par des expériences de visualisation, à l'aide de traceurs.

	a	b	ℓ	x
Cette étude	0,64	0,85	1,44	1,79
Coutanceau et al (expérimental)	0,66	0,94	1,32	1,60

Tableau II : Comparaison des paramètres géométriques du tourbillon attaché. Re = 20.

III.5. ECOULEMENT INITIAL A NOMBRE DE REYNOLDS ELEVE

Des études expérimentales ont mis en évidence le sillage du cylindre soumis à un démarrage impulsif (COUTANCEAU et al, 1979) pour des nombres de Reynolds élevés.

Il a été mis en évidence une structure symétrique avec des zones de recirculation comprenant des tourbillons "secondaires" au voisinage de la zone de décollement.

L'existence de tels résultats nous a amené à simuler numériquement cet écoulement afin de déterminer les limites de convergence et de précision du code à grand nombre de Reynolds. C'est ainsi que nous avons calculé les différents régimes, résumés sur le tableau IV.

Re	300	550	3000
$\delta\theta$, δz	$\pi/40$	$\pi/40$	$\pi/80$
δt	0,05	0,05	0,025
T_{final}	20	20	12

Tableau IV

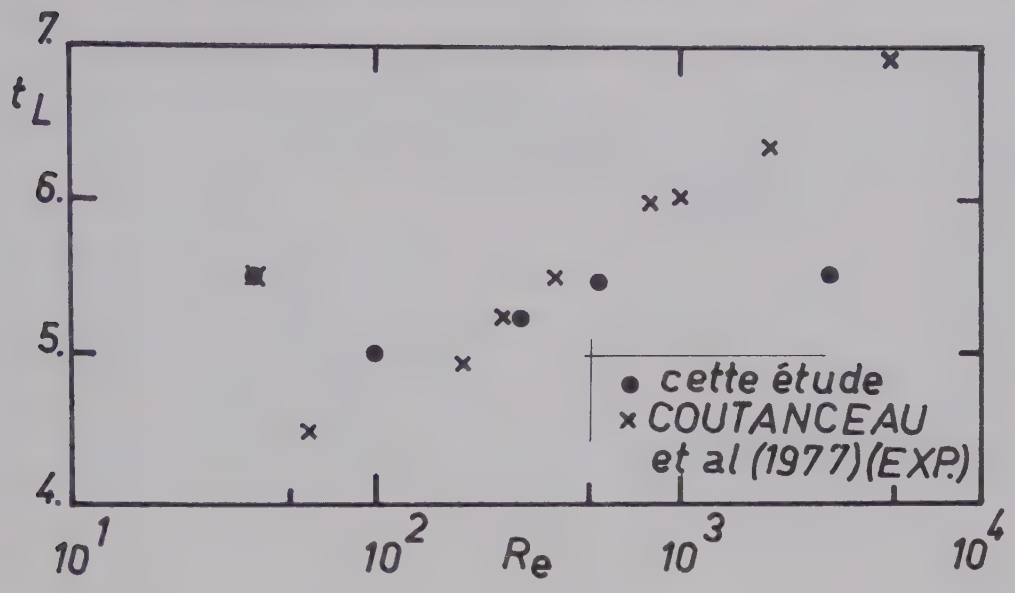


Figure 12 : Evolution du temps t_L correspondant à une longueur de recollement $L/r_o = 2$ en fonction du nombre de Reynolds.

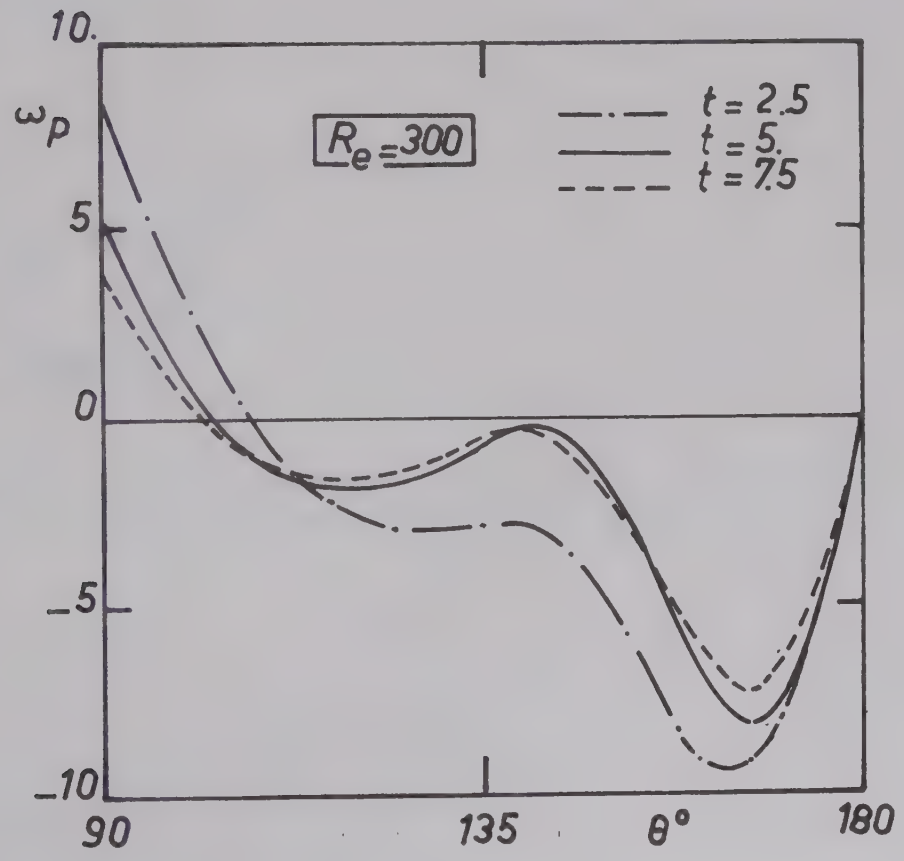


Figure 13 : Evolution dans le temps, du rotationnel à la parois ω_p dans la zone de recirculation

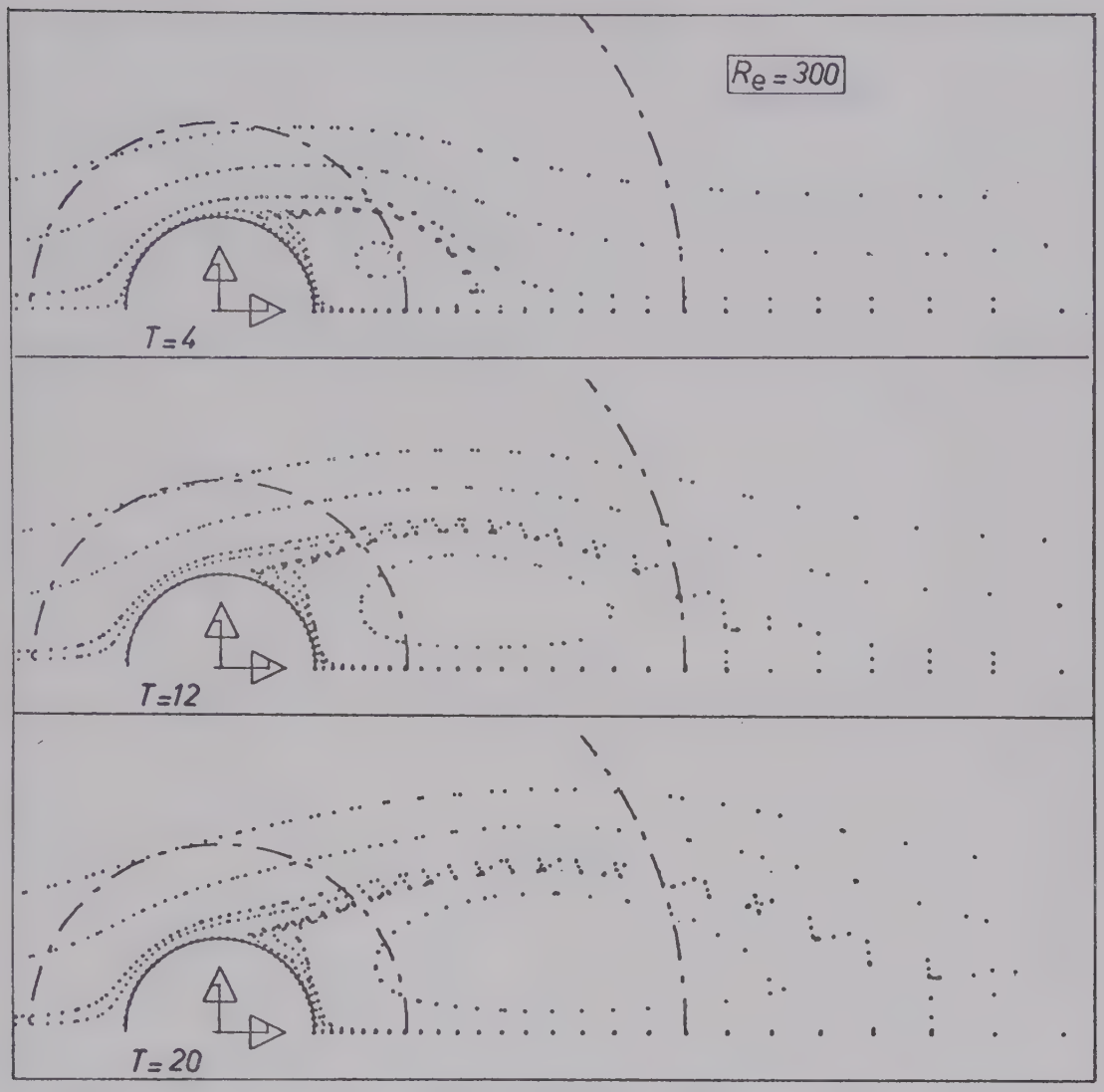


Figure 14 : Ecoulement symétrique à nombre de Reynolds élevé. Lignes de courant à des instants initiaux.

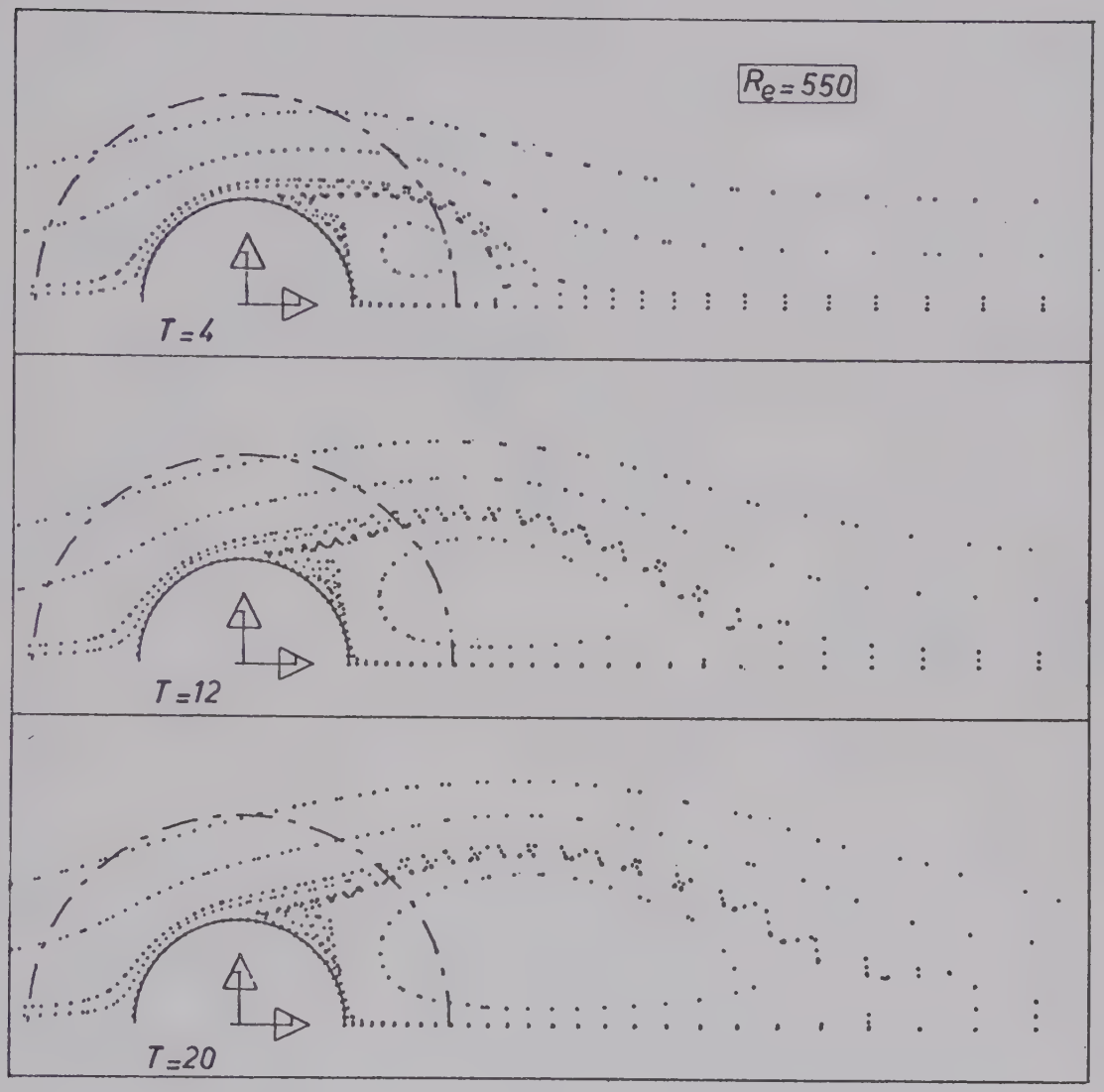


Figure 15 : Ecoulement symétrique à nombre de Reynolds élevé. Lignes de courant à des instants initiaux. Mise en évidence du tourbillon "secondaire".

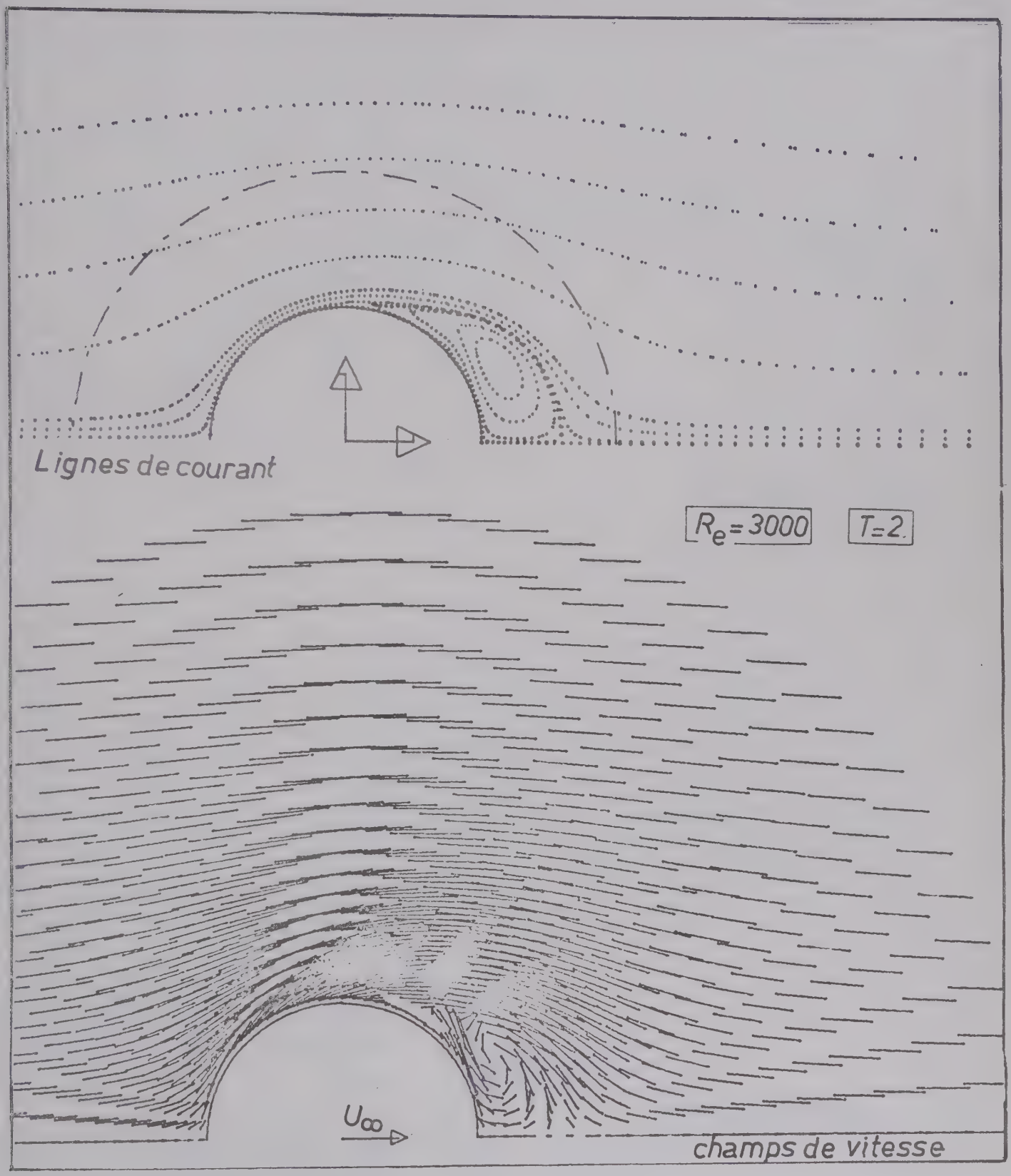


Figure 16 a

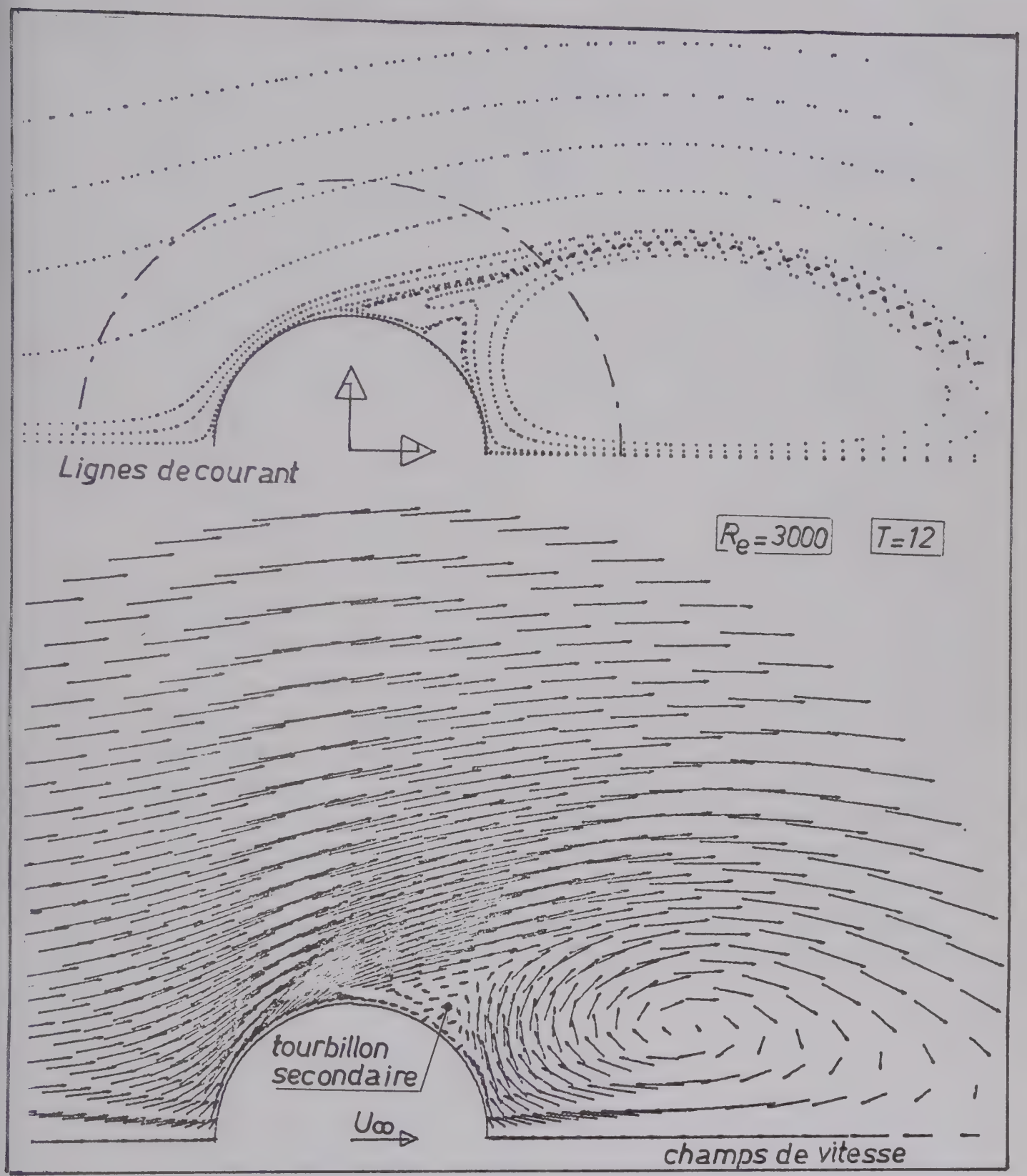


Figure 16a,b : Ecoulement symétrique à nombre de Reynolds élevé. Lignes de courant et champ de vitesse à des instants initiaux.

Il a été ainsi mis en évidence la convergence des schémas centrés pour Re = 300 et 550, alors que pour le régime Re = 3000 ce schéma est divergent. L'utilisation des schémas hybrides (chap. IV §III.2.1) inconditionnellement stables, conduit à une solution pour le régime à Reynolds 3000.

Les résultats de cette étude sont portés sur les figures 12, 13, 14, 15 et 16(a,b). Pour Re = 300 il existe un ralentissement prononcé de l'écoulement dans la zone de recirculation près de l'obstacle, traduit par un renflement des lignes de courant, alors que pour Re = 550 et 3000 ce ralentissement conduit à un décollement interne au tourbillon principal donnant naissance à un tourbillon secondaire. Celui-ci, bien qu'atteignant une taille appréciable pour Re = 3000, reste unique contrairement à l'expérience de COUTANCEAU et al (1979) qui met en évidence deux tourbillons secondaires pour ce même régime.

Cette étude permet également de mettre en évidence la vitesse de formation de la zone de recirculation. Si l'on repère par t_L l'instant où la longueur de recollement L/r_o atteint la valeur 2, on constate (figure 12) que la courbe $t_L(L/r_o = 2)$ ne varie pas d'une façon monotone. En effet, elle présente un minimum entre le nombre de Reynolds 40 et 100, phénomène attribué par COUTANCEAU et al (1979) à l'apparition du renflement des lignes de courant ou éventuellement du tourbillon secondaire dans la zone de recirculation. Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 60, cette interprétation est confirmée dans notre simulation par l'analyse du tourbillon à la paroi ω_p que nous avons porté pour Re = 300. (figure 13). L'existence d'un maxima très voisin de la valeur nulle révèle que ce régime est à la limite de l'apparition d'un tourbillon secondaire.

III.6. CONCLUSION

Cette étude a permis d'éprouver le code de calcul dans le cas de l'écoulement symétrique. Les principaux résultats sont regroupés sur le tableau III et s'avèrent être en bon accord avec ceux de la littérature. L'existence de temps de calculs raisonnables (Tableau I) nous

	Nombre de Reynolds, Re		
S	20	40	100
	Longueur de recollement, L/r_o		
	1,804	4,288	11,17
	Angle de décollement, $\theta_d°$		
	135,73	125,80	112,70
	Coefficient de traînée visqueuse, C_{XV}		
2,159	0,844	0,423	0,286
	Coefficient de traînée de pression, C_{XP}		
2,192	1,070	0,841	0,669
	Coefficient de traînée, C_X		
4,350	1,915	1,390	0,975
	Maximum du tourbillon à la paroi		
2,185	4,200	6,132	10,10
	Minimum du tourbillon à la paroi		
	- 0,241	- 0,445	- 0,548

Tableau n° III : Résultats des principales caractéristiques de l'écoulement symétrique.

permet donc d'envisager d'appliquer ce code au calcul de l'écoulement avec allée tourbillonnaire et transfert de chaleur.

IV. CHAMP THERMIQUE - TRANSFERT DE CHALEUR

Le transfert de chaleur peut être caractérisé par deux paramètres adimensionnels : le nombre de Nusselt local Nu et le nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}$ définis respectivement par :

$$Nu = \frac{2r_o}{\lambda \Delta T} \cdot q \qquad (\Delta T = T_p - T_\infty)$$

$$\overline{Nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Nu.d\theta$$

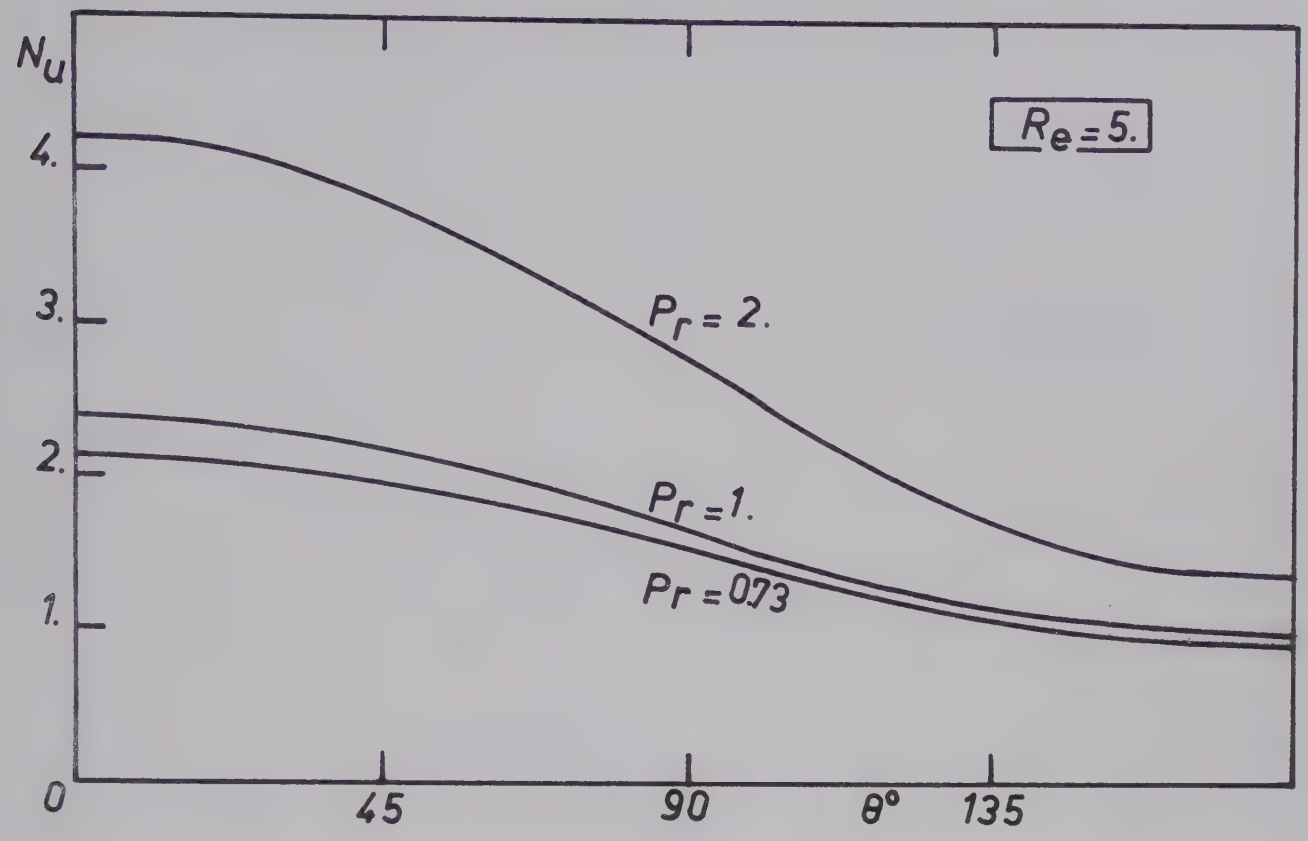
avec : $q = - \lambda \cdot \left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_{Z=0}$: flux de chaleur échangé à la paroi.

Ils rendent compte de l'échange de chaleur entre l'obstacle et le fluide. Le premier nombre nous renseigne ponctuellement sur cet échange, le deuxième permet une analyse globale de cet échange, le cylindre est considéré thermodynamiquement comme une source de chaleur. C'est sur la connaissance fine de cette dernière donnée qu'est basé le principe d'anémométrie au fil chaud. C'est également le nombre de Nusselt moyen qui détermine l'efficacité d'un échangeur thermique.

La formulation de ces paramètres à l'aide des variables adimensionnelles est immédiate :

$$Nu = - 2 \left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_{Z=0}$$

$$\overline{Nu} = - \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_{2=0} \cdot d\theta$$


Nu
4.
3.
2.
1.
0
45
90
θ°
135
Re = 5.
Pr = 2.
Pr = 1.
Pr = 0.73

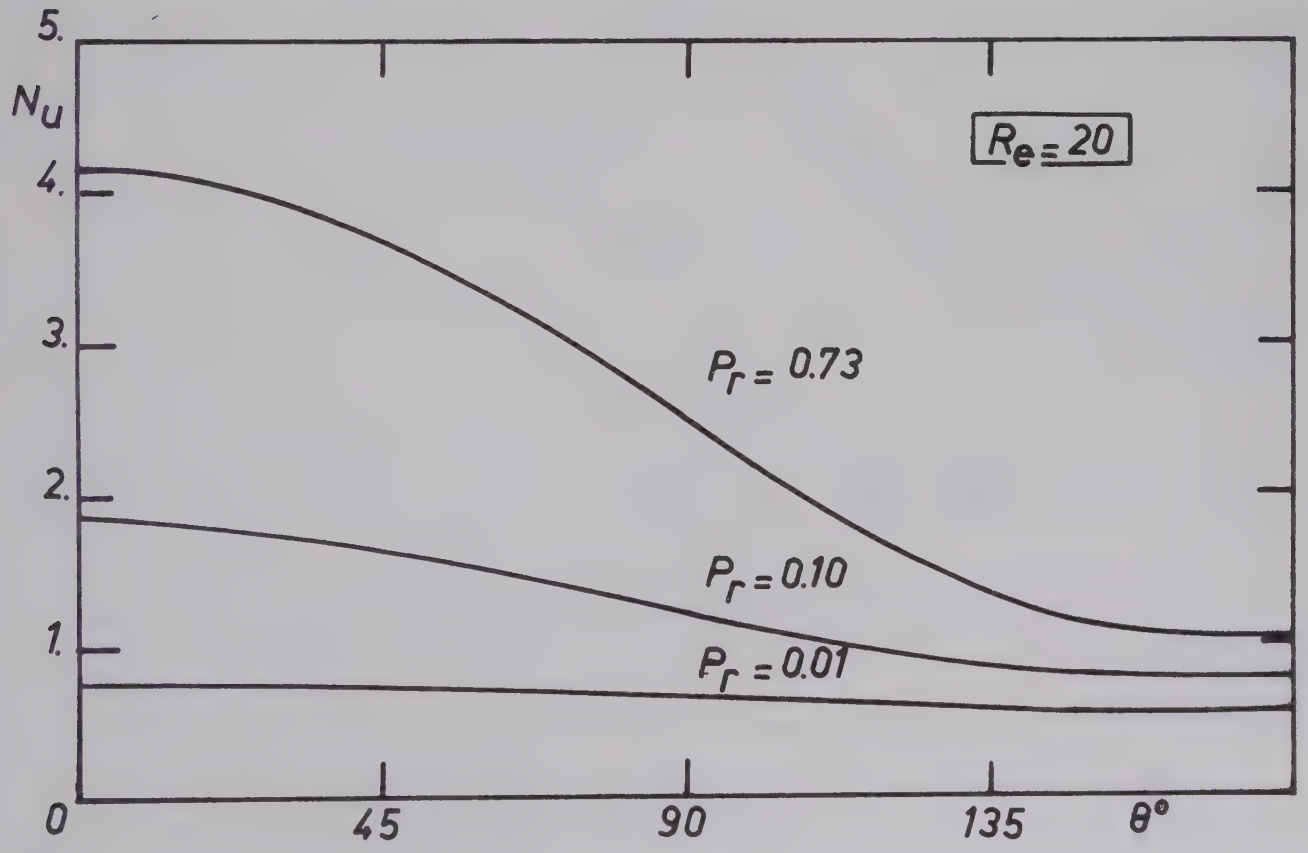

5.
Nu
4.
3.
2.
1.
0
45
90
135
θ°
Re = 20
Pr = 0.73
Pr = 0.10
Pr = 0.01

Figure 17

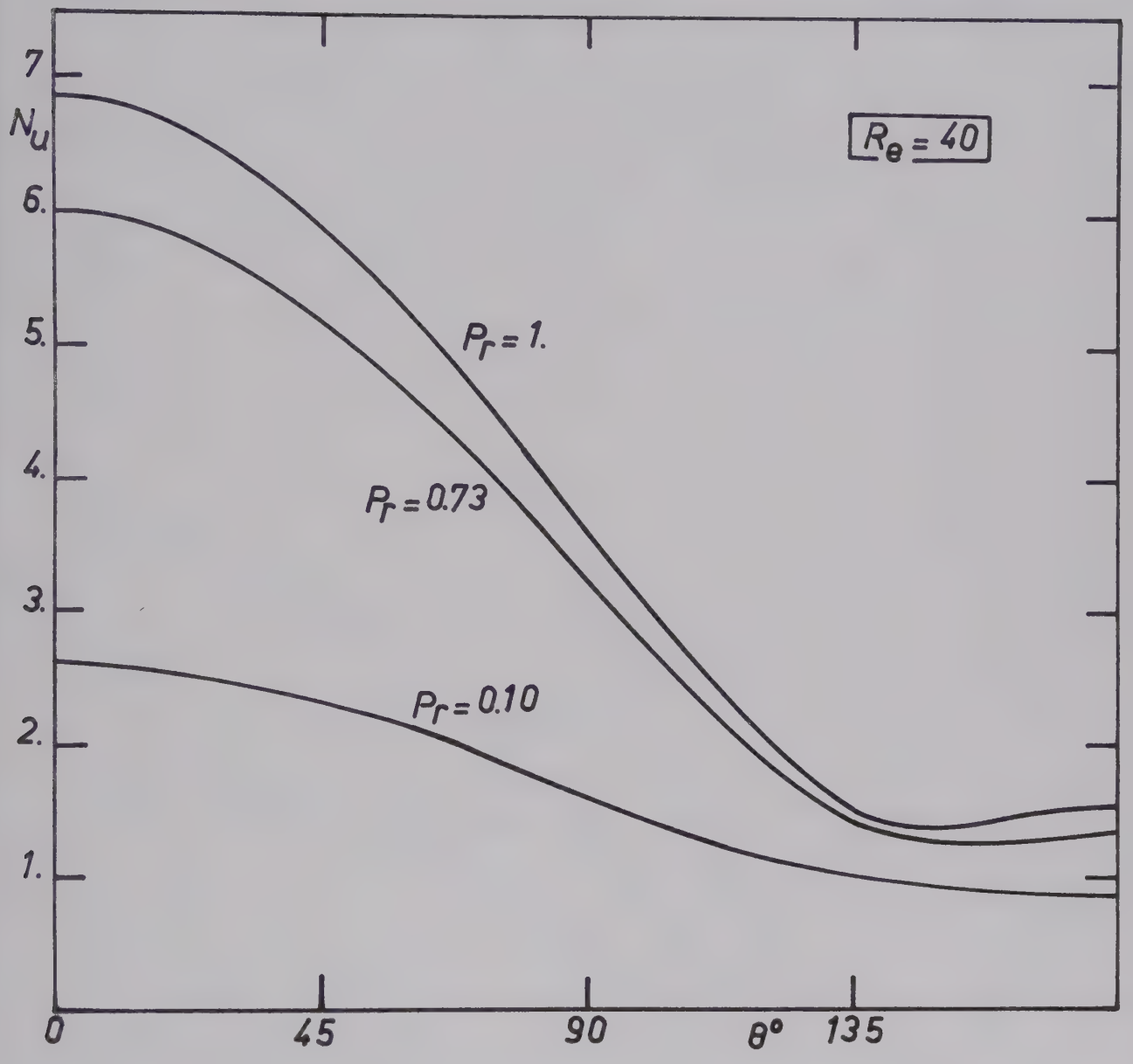


Figure 17 : Nombre de Nusselt local en fonction du nombre de Prandtl et du nombre de Reynolds.

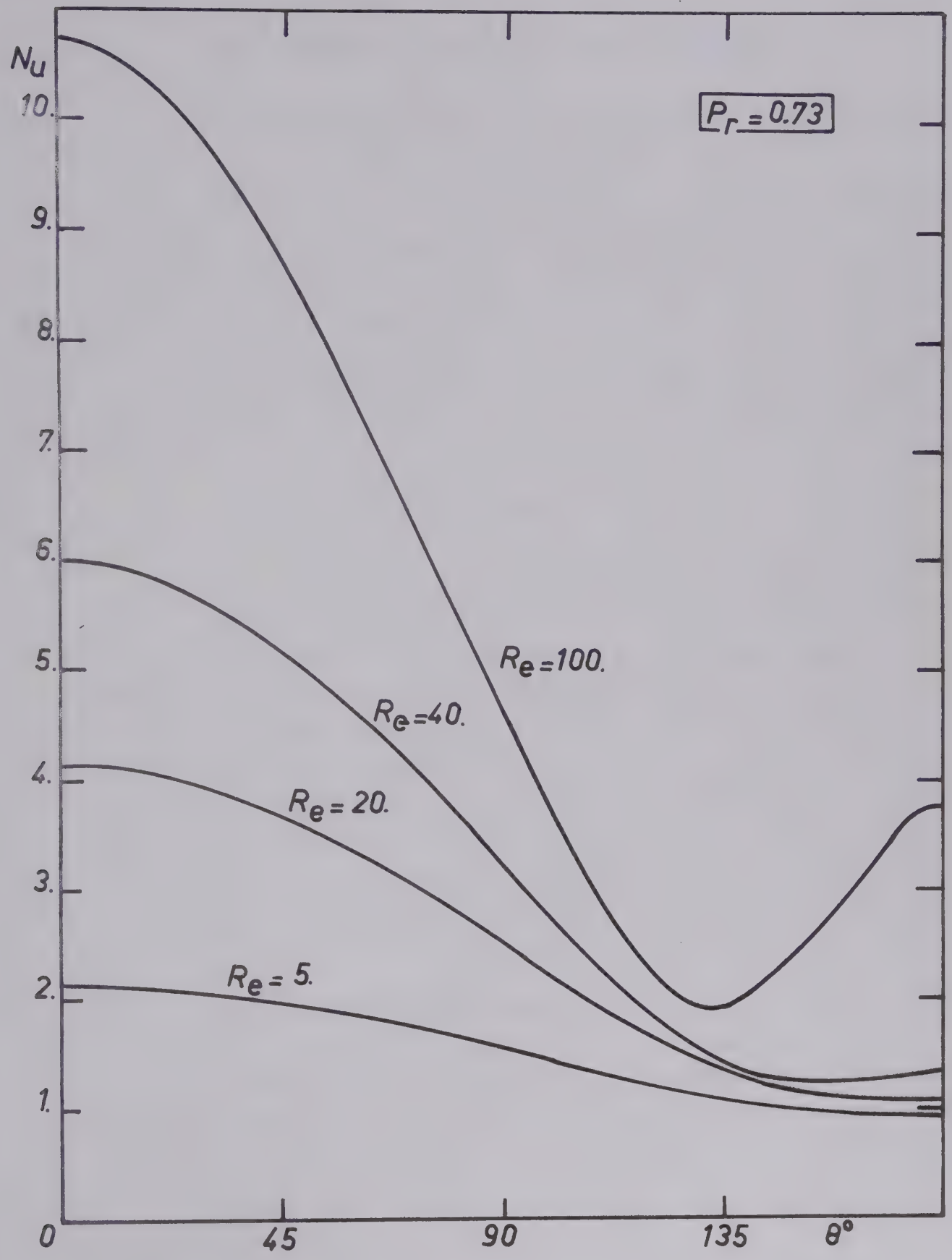


Figure 18 : Evolution du nombre de Nusselt local pour différents régimes d'écoulement symétrique

IV.1. REMARQUE : RESOLUTION DU CHAMP DE TEMPERATURE

La grande stabilité du code de calcul, alliée à des conditions à la frontière de l'obstacle connues explicitement (Tp ≡ 1) permet de résoudre le champ de température (équation III.3.) avec des pas de temps importants. Pour Re = 100, Pr = 0,73, celui-ci est ainsi le double du pas de temps utilisé pour déterminer le champ dynamique $\delta t = 0,1$. Ceci contribue à diminuer d'un facteur 2, le temps de calcul relatif à la détermination du champ thermique.

L'organisation de notre programme permet de traiter pour un nombre de Reynolds fixé, les champs de température relatifs à plusieurs nombres de Prandtl.

IV.2. NOMBRE DE NUSSELT LOCAL

Nous avons effectué plusieurs expériences numériques. Les figure 17, 18 traduisent les résultats.

La variation du nombre de Nusselt local est sensiblement monotone décroissante en fonction de la position angulaire, excepté pour Re = 100. Cette variation est en accord avec les visualisations numériques du champ de température, figures 11c, 20, qui rendent compte de la variation spatiale de la température : isothermes serrées à l'amont qui vont en s'élargissant à l'aval. La forte valeur du nombre de Nusselt dans la zone aval de l'obstacle pour Re = 100 révèle que la convection y est forte, comme cela est encore confirmé par l'allongement important des isothermes dans le sillage.

IV.3. NOMBRE DE NUSSELT MOYEN $\overline{Nu}$

La comparaison de nos résultats est en parfait accord avec les lois expérimentales (figure 19). Ces lois (chap. II) prévoient un comportement du nombre de Nusselt moyen de la forme :

$$\overline{Nu}\ Re^{-n}\ Pr^{-1/3} = F(Pr) \qquad (1)$$

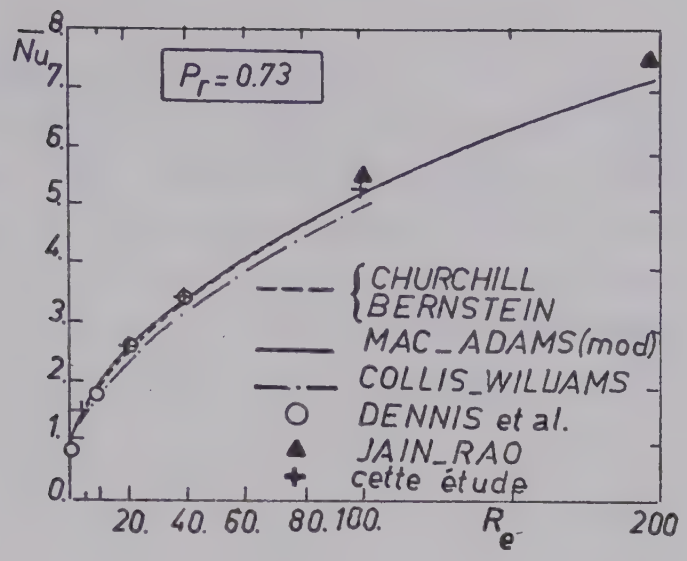


Figure 19 : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds

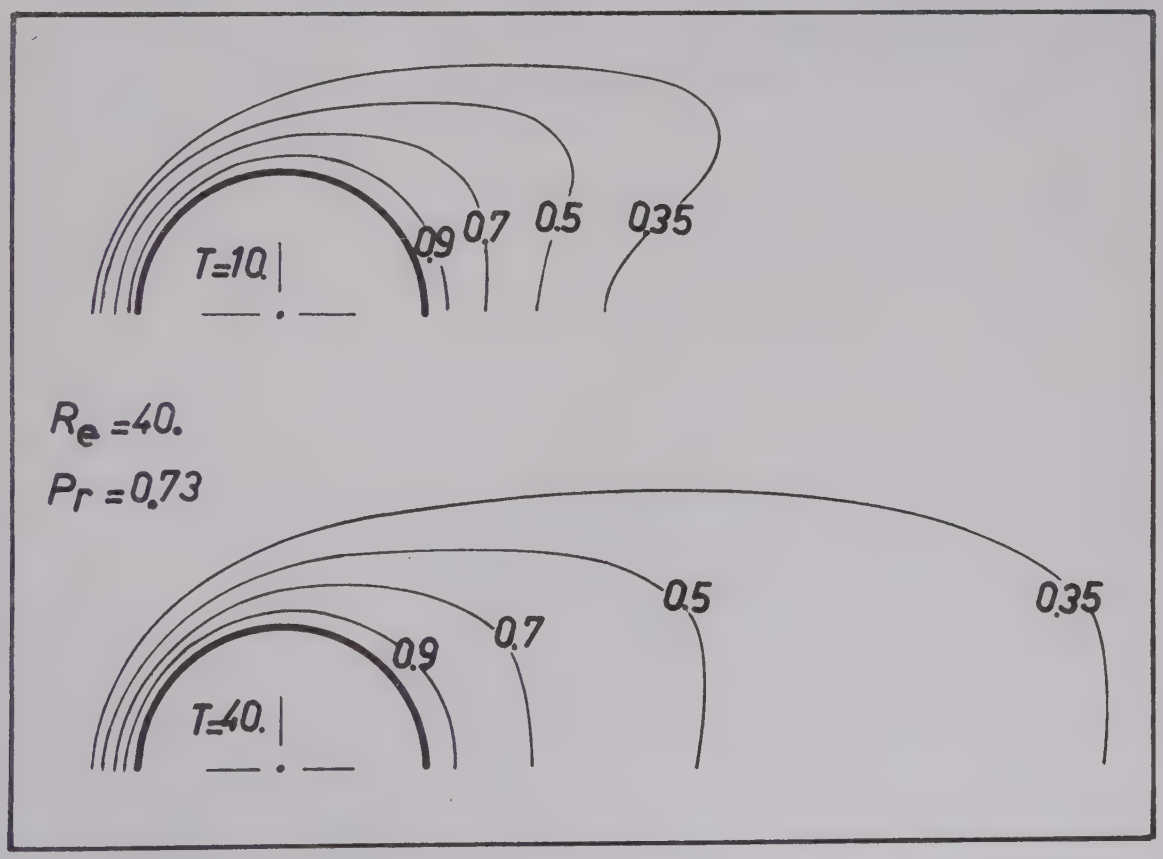


Figure 20 : Visualisation du champ thermique à des instants différents. Lignes isothermes.

où l'exposant n est voisin ou égal à 1/2. Un tel comportement est expliqué par les résultats de la théorie de la couche limite thermique. Les divers raffinements des constantes et des exposants permettent de corriger la différence qui existe entre le comportement du champ de température qui règne à des nombres de Reynolds modérés, et le champ thermique à grand nombre de Reynolds. Il est tout de même remarquable que le transfert de chaleur de l'écoulement autour du cylindre où existent des zones importantes décollées (25%, 30%, 41% de la surface d'échange respectivement pour Re = 20, 40, 100), zones pour lesquelles l'approximation de type couche limite n'est pas valable, soit relativement bien traduit par la relation (1). C'est certainement la faible contribution au transfert global de la zone de culot, comme on peut le voir sur la figure 18, qui explique ce comportement (10,4%, 11,6%, 17,4% respectivement pour Re = 20, 40, 100).

Enfin, sur le tableau IV sont portés les principaux résultats de l'étude du transfert thermique dans le régime d'écoulement symétrique autour du cylindre. Il est à noter que la comparaison des résultats est en bon accord avec l'étude numérique de DENNIS et al (1968) et la loi proposée par CHURCHILL et BERNSTEIN (1977).

Re \ Pr	AUTEURS	0,01	0,1	0,73	1
5	-Cette étude			1,51	1,64
	-Churchill, Bernstein (1977)		0,770	1,400	1,544
	- Collis et Willians (1959)			1,395	
	- Hilpert (1933)			1,408	
20	-Cette étude	0,657	1,288	2,522	
	-Denis et al.			2,557	
	-Churchill, Bernstein	0,616	1,240	2,496	2,788
	-Collis et Willians			2,396	
	-Hilpert			2,34	
40	-Cette étude		1,67	3,40	3,82
	-Denis et al (1968)			3,480	
	-Churchill, Bernstein	0,747	1,628	3,406	3,818
	-Collis et Willians			3,43	
100	-Cette étude			5,30	
	-Churchill, Bernstein	1,007	2,398	5,211	5,862
	-Collis et Willians			5,026	
	-Hilpert			5,29	

Tableau n° IV : Résultats pour la configuration symétrique du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}(Pr,Rey)$
Numérique : Collis et al.
Expérimental : Churchill et Bernstein (équation III.7)
Collis et Willians (équation III.5)
Hilpert (équation III.4)

CHAPITRE VI

ECOULEMENT AVEC ALLEES TOURBILLONNAIRES

CHAPITRE VI

ECOULEMENT AVEC ALLEES TOURBILLONNAIRES

I. RAPPELS

Nous avons exposé au chapitre II les caractères généraux de l'écoulement avec allée tourbillonnaire. Ce régime apparaît physiquement au-delà d'un nombre de Reynolds de 40. Il est lié à une perte de stabilité de l'écoulement symétrique, provoquée par la présence inévitable de perturbations. Or, ces perturbations, également présentes pour des plus faibles nombres de Reynolds, ne provoquent pas de perte de stabilité. Il a été également démontré expérimentalement que le phénomène d'instabilité ne présente pas d'hystérésis. Ainsi, lorsqu'on diminue la vitesse pour parvenir à un nombre de Reynolds inférieur au nombre de Reynolds critique de 40, l'allée tourbillonnaire disparaît et l'écoulement s'ordonne symétriquement.

Numériquement, la simulation du régime d'allée tourbillonnaire n'apparaît pas naturellement, les erreurs de troncature n'étant pas suffisamment importantes pour provoquer l'instabilité. La solution numérique conduit alors à une configuration symétrique bien que les nombres de Reynolds soient supérieurs à 40.

C'est par l'injection de perturbations numériques que la rupture de stabilité est provoquée.

II. NATURE DES PERTURBATIONS NUMÉRIQUES

Nous avons envisagé et testé deux types de perturbations asymétriques localisées à la paroi du cylindre, qui ont conduit, toutes deux, à provoquer la perte de stabilité de la configuration symétrique.

Dans les deux cas, trois phases chronologiques sont à distinguer :

- Une première phase où, en l'absence de perturbations numériques, l'écoulement symétrique se structure ; en particulier les zones de recirculation apparaissent, puis se développent.
- Injection de la perturbation pendant quelques pas de temps puis suppression des perturbations artificielles.
- La troisième phase est caractérisée par l'apparition et l'amplification du caractère asymétrique de l'écoulement qui conduit après un état transitoire, plus ou moins long, à l'établissement du régime avec allée tourbillonnaire.

II.1. PREMIER TYPE DE PERTURBATION P_I

Elle est réalisée en perturbant la valeur du rotationnel à la paroi ω_p, en imposant à l'instant t_i^1 (temps initial de la perturbation) :

$$\omega_p^{n+1}(\theta) = \omega_p^n(\theta) + c.\delta\omega$$

où c est une constante positive et $\delta\omega$ l'intensité de la perturbation. Il est clair que cette perturbation est non symétrique, en effet elle conduit à majorer les valeurs positives du rotationnel ω_p et à minorer (en module) les valeurs négatives. Ne tenant pas compte de l'influence de la fonction courant ψ dans le voisinage, cette perturbation correspond à une violation de l'équation de continuité, d'où un déplacement global du fluide.

Cette perturbation est maintenue jusqu'à l'instant t_f^1. A l'instant $t_i^2 = t_f^1 + \delta t$, on impose alors :

$$\omega_p^{n+1}(\theta) = \omega_p^n(\theta) - c\delta\omega$$

condition qui est maintenue jusqu'au temps t_f^2 puis supprimée.

La valeur de la constante c ayant été prise égale à l'unité, l'intensité de la perturbation $\delta\omega$ a été arbitrairement liée aux paramètres de discrétisation :

$$\delta\omega = \delta\theta/\delta t$$

En se rapportant au tableau I du chapitre V, il vient $\delta\omega = 1{,}963$. Cette perturbation provoque une forte variation relative du rotationnel aux points de la paroi de l'obstacle à faible production du rotationnel, à savoir dans une zone étroite centrale au point d'arrêt amont et dans les zones à recirculation situées au culot de l'obstacle. Il s'ensuit une discontinuité d'intensité variable radialement du champ rotationnel à la paroi. La pression sur l'obstacle P_p étant fonction de la dérivée du rotationnel à la paroi $\partial\omega/\partial r\big|_{r=r_o}$, cela entraîne une forte portance positive dans la première phase, négative dans la seconde, respectivement + 3,70 et - 5,75 pour $Re = 100$.

Après suppression des perturbations au delà du temps t_f^2, la discontinuité du champ rotationnel disparaît comme l'indique la très faible valeur de la portance instantanée.

II.2. DEUXIEME TYPE DE PERTURBATION P_{II}

La perturbation P_{II} est provoquée par une rotation momentanée du cylindre. La rotation du cylindre modifie également la valeur du rotationnel à la paroi. La relation de Wood (chap. IV. 3.13) est modifiée pour tenir compte de la rotation du cylindre qui entraîne, par adhérence, le fluide (annexe III).

$$\omega_{i,p} = \{\frac{3}{\delta z^2}(\psi_{i,2} - \psi_{i,p}) - \frac{1}{2}\omega_{i,2} + 3(\frac{1}{3} + \frac{1}{\delta z} + 2)V_\theta\}/(1+\delta z) + o(\delta z^2)$$

L'injection des perturbations, s'effectue de façon chronologique analogue, ainsi :

$t_i^1 \leq t \leq t_f^1$ $\qquad V_\theta = 0{,}15$

$t_i^2 \leq t \leq t_f^2$ $\qquad V_\theta = -\ 0{,}25$

V_θ désignant la valeur de la vitesse de rotation à la périphérie du cylindre.

Cette perturbation du rotationnel à la paroi, contrairement à la première est caractérisée par une faible intensité de la variation du rotationnel à la paroi, respectivement 0,014 et - 0,023 pour la première et la seconde phase. Ici la consistance du schéma numérique est respectée, les équations du mouvement ne sont pas violées. La modification de ω_p étant faible, le champ rotationnel modifié au voisinage de la paroi s'adapte rapidement. La conséquence la plus notable de cette perturbation est le déplacement des points de décollement, entraînant un tourbillon attaché dans une zone à fort gradient de vitesse, provoquant rapidement l'ouverture de la poche de recirculation par cisaillement comme nous le verrons par la suite.

Remarque : Il a été pris volontairement, pour la vitesse V_θ des intensités différentes aux intervalles de temps (t_i^1, t_f^1) et (t_i^2, t_f^2). Ceci conduit plus rapidement au régime d'allée tourbillonnaire recherché.

II.3. APPLICATION AU REGIME $Re = 100$

Ces deux types de perturbations numériques conduisent au régime avec allée tourbillonnaire. Cependant, les régimes transitoires qui précédent à l'établissement de l'écoulement périodique sont différents.

Nous avons visualisé sur les figures 1a, 1b, 1c, 1d les lignes de courant obtenues avec les deux codes de calcul à différents instants. Sur la première planche où sont visualisées les lignes de courant à l'instant t = 10, on note clairement que les deux perturbations agissent différemment sur l'écoulement.

L'écoulement I relatif à la perturbation P_I est quasi symétrique, une très légère asymétrie pouvant être notée sur la ligne $\psi = 0$ au point de recollement. La perturbation P_{II} provoque l'ouverture et le détachement du tourbillon supérieur. Remarquons que dans les deux cas, la partie du sillage distante de quelques rayons ($r > 6$) du centre de l'obstacle n'est pas encore affectée par des perturbations.

Un mécanisme séquentiel de production, détachement et convection des tourbillons, alternativement aux parois supérieure et inférieure du culot, est déclenché dans l'écoulement II à l'instant t = 25. On peut y voir le premier tourbillon détaché dont le centre est situé à 5 rayons de l'axe du cylindre, alors que le tourbillon attaché à la partie inférieure du culot, se développe. Le sillage est élargi et structuré par le passage du premier tourbillon. Au même instant t = 25, dans l'écoulement I, les deux tourbillons restent attachés, bien qu'ils atteignent une taille importante ($L/r_o = 9,7$). Leur point de recollement est déplacé vers le haut, témoignant de l'amplification de l'asymétrie notée précédemment. Ceci est encore vérifiable sur plusieurs caractéristiques de l'écoulement, en particulier sur le point d'arrêt aval qui oscille très légèrement, l'amplitude de cette oscillation croissant dans le temps.

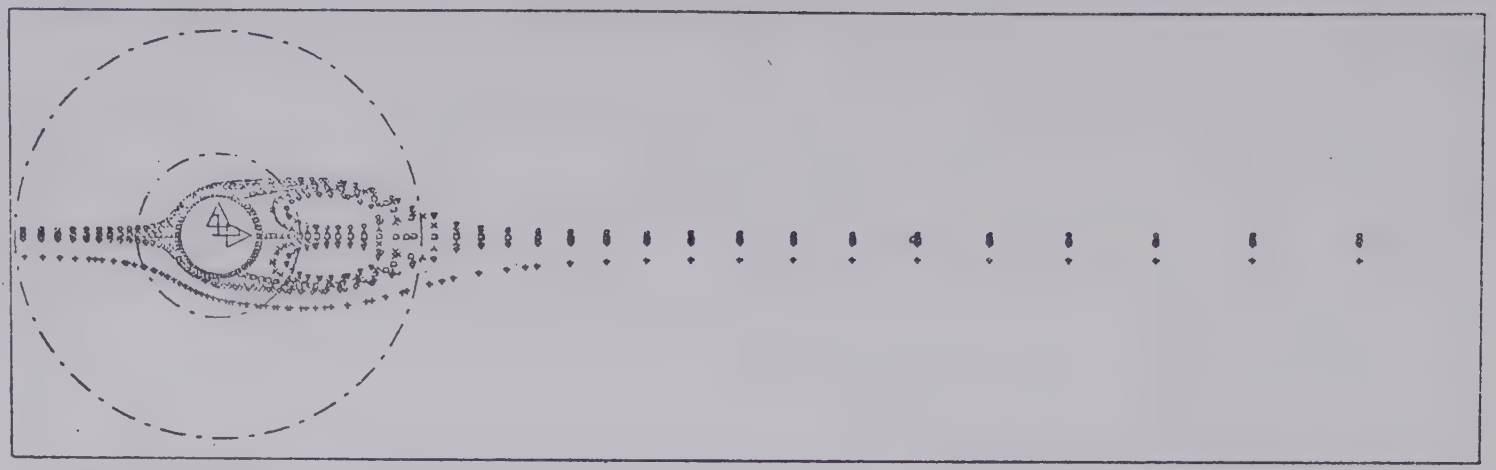
Signalons que pour une section donnée, le sillage de l'écoulement I est plus large que celui de l'écoulement II.

A l'instant t = 80, l'écoulement II est entièrement établi, le sillage est structuré par le passage à intervalles réguliers des tourbillons convectés vers l'aval. Le mécanisme séquentiel de production et de détachement, alternativement de part et d'autre de l'arrière du cylindre conditionne entièrement la structure du sillage d'allées tourbillonnaires. Ce régime périodique est caractérisé par la fréquence réduite de Strouhal, St, qui représente la fréquence f des tourbillons qui se détachent d'un même côté du culot :

$$St = f \cdot \frac{2r_o}{U_\infty}$$

Au même instant t = 80, se produit le premier détachement de tourbillon (partie inférieure) dans l'écoulement I. Ce tourbillon va être convecté dans un sillage en partie structuré, comme le témoignent les ondulations des lignes de courant aval. Le sillage ici est bien différent de celui rencontré par le premier tourbillon détaché de l'écoulement II. Lorsqu'on progresse dans le temps, l'écoulement I tend vers

Figure $1a_I$



R_e=100. T=10.

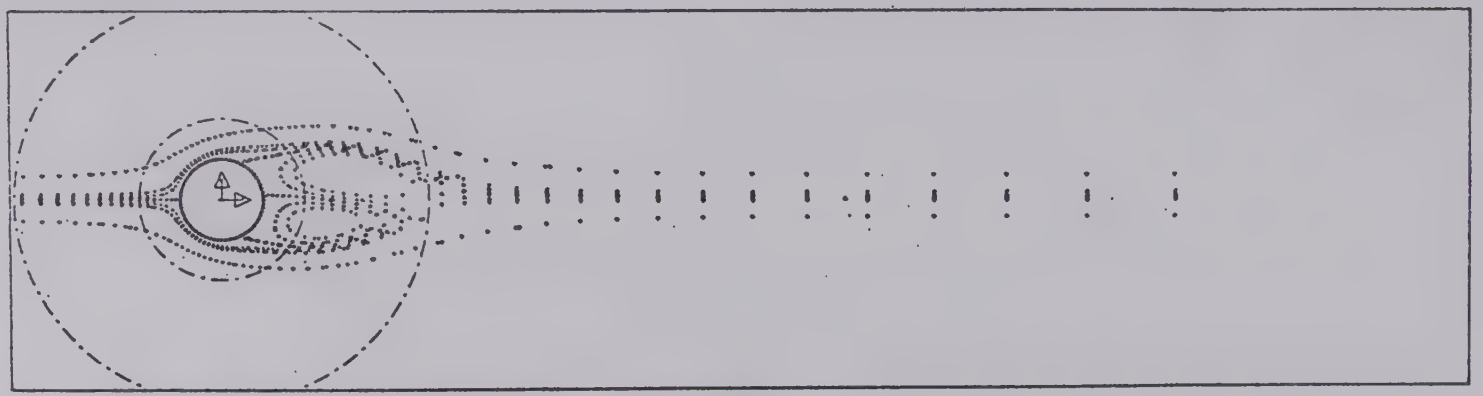
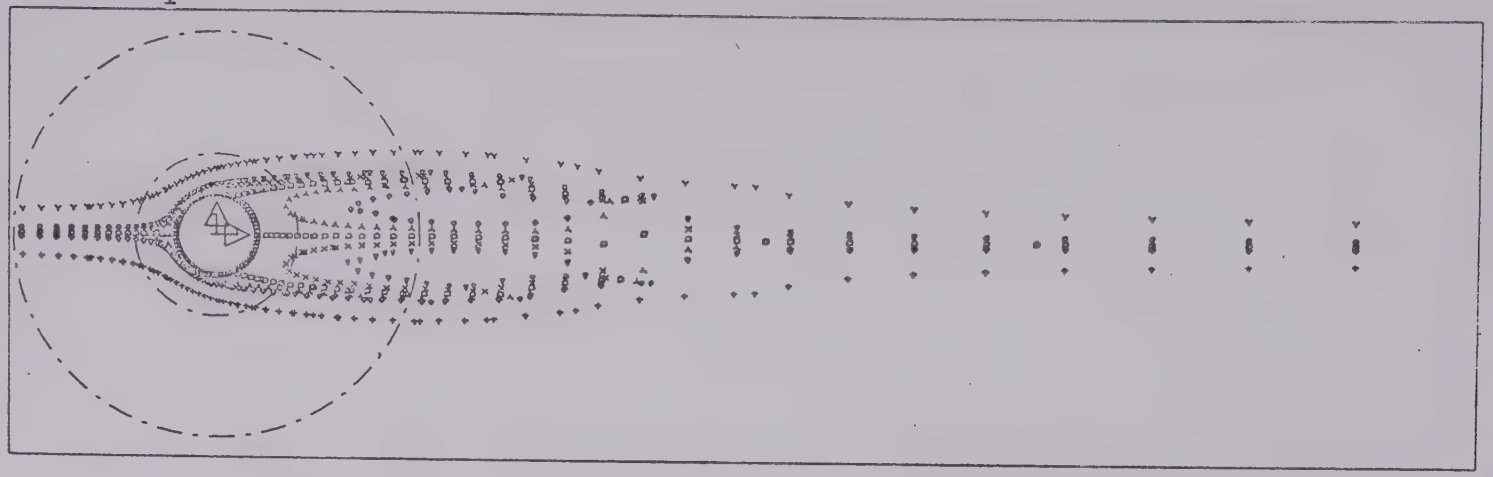


Figure $1a_{II}$

Figure $1b_I$



$R_e = 100.\ T = 25.$

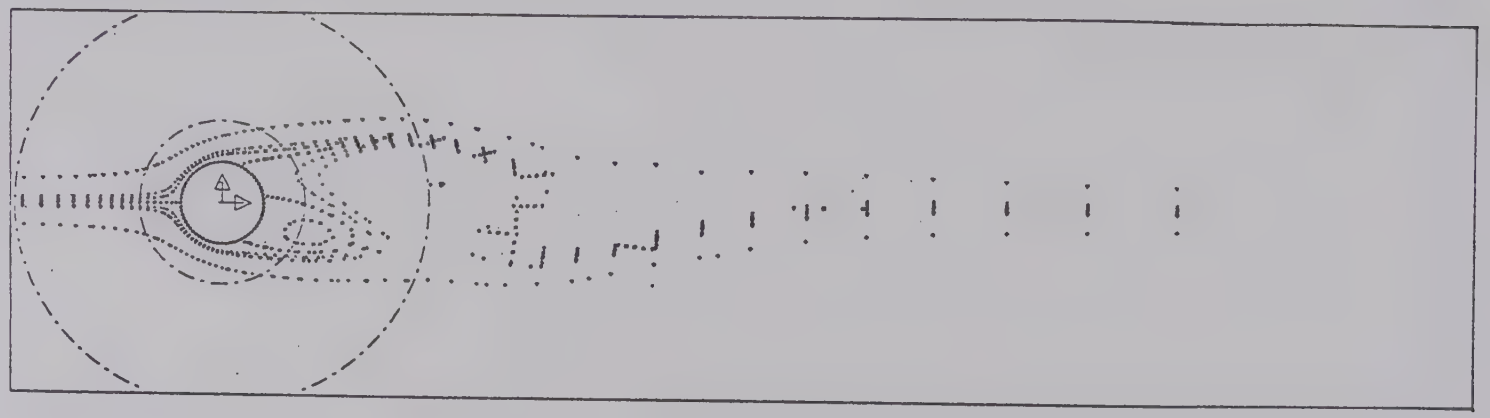
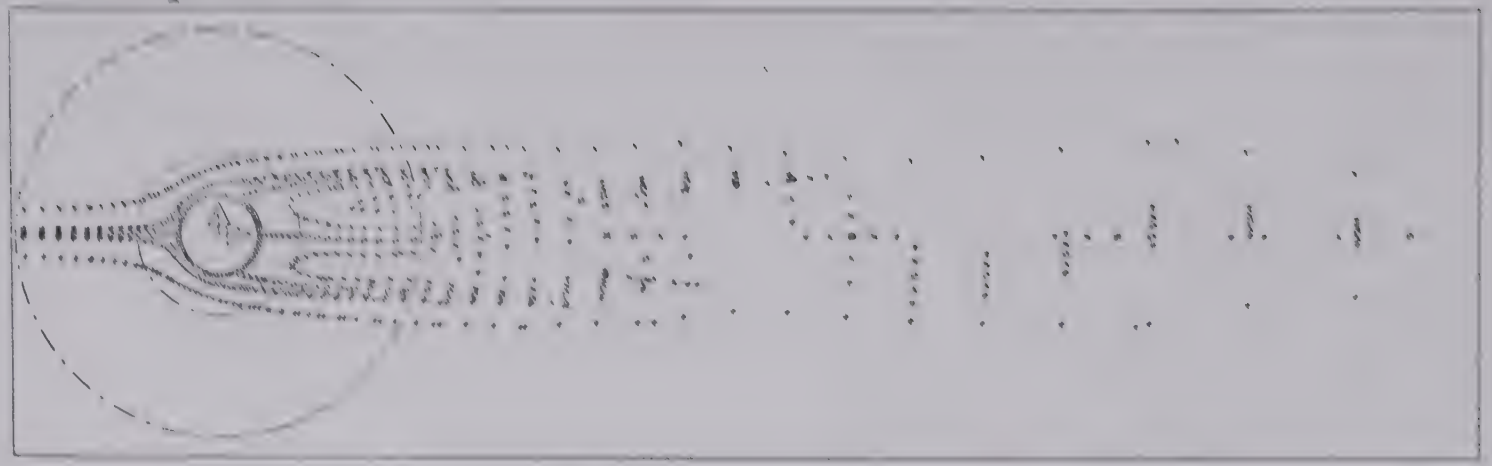


Figure $1b_{II}$

Figure $1c_I$



$R_e = 100.\ \ T = 80.$

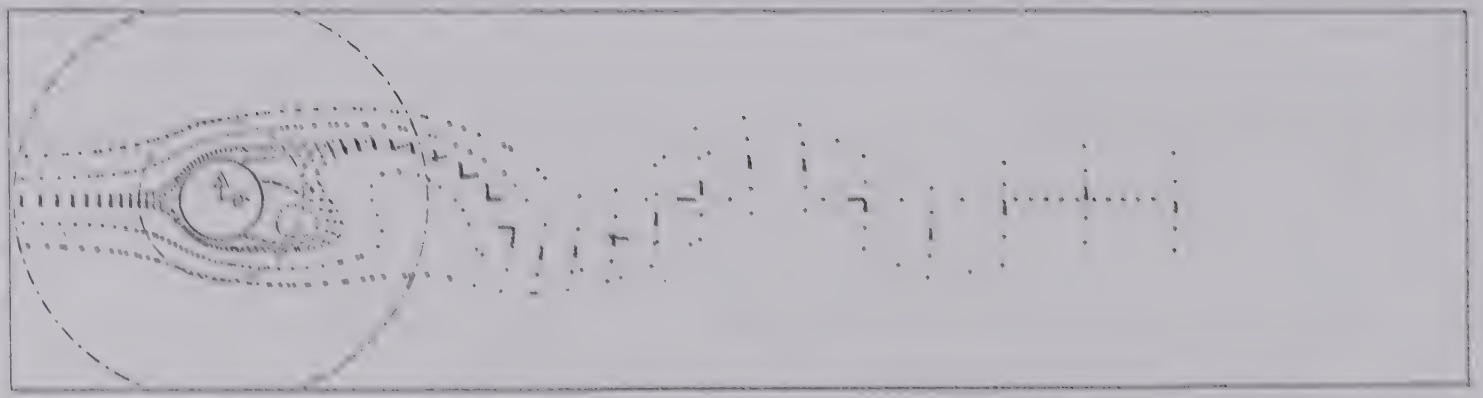
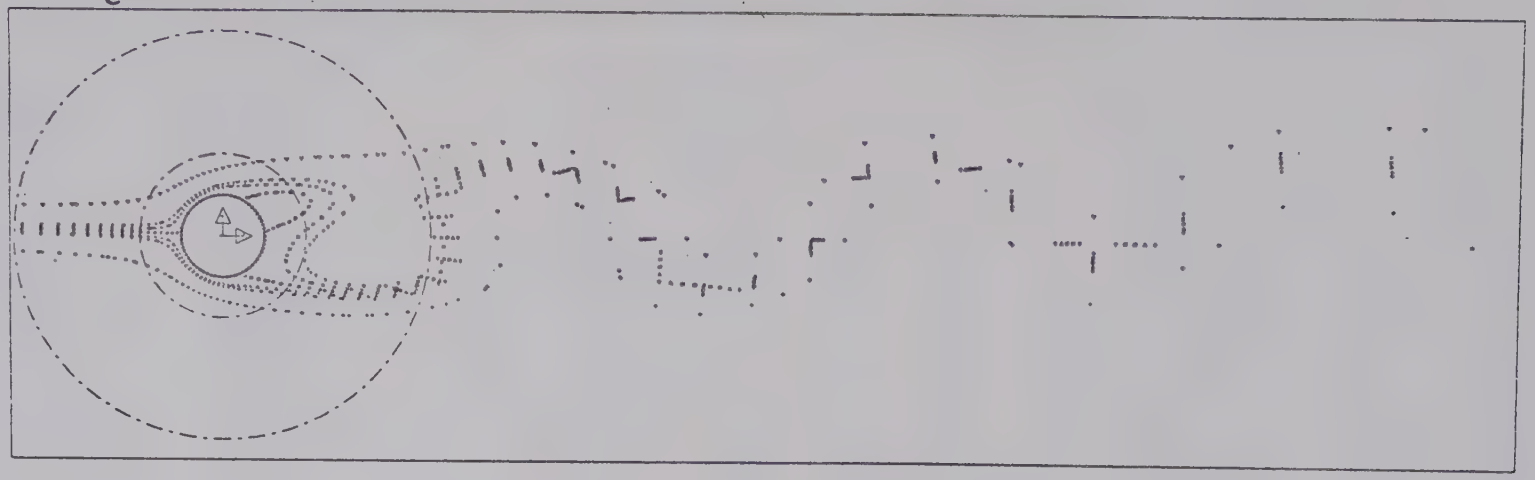


Figure $1c_{II}$

Figure 1d

$R_e = 100.\ T = 135.$



Figures 1 : Etablissement du régime d'allées tourbillonnaires par injection de perturbations numériques.

$1a_I$, $1b_I$, $1c_I$, $1d_I$: perturbation P_I

$1a_{II}$, $1b_{II}$, $1c_{II}$: perturbation P_{II}

La ligne $\psi = 0$ est notée ◘ .

A la frontière extérieure R_∞, la condition $\psi_\infty = R_\infty \sin\theta(1 - \frac{1}{R_\infty^2})$ est modifiée à l'aide de la fonction $f(R_\infty,t)$:

$$\psi_\infty = R_\infty \cdot \sin\theta(1 - \frac{1}{R_\infty^2}) + f(R_\infty,t)$$

où $f(R_\infty,t)$ rend compte du déplacement des lignes de courant à la frontière R_∞ dû à la circulation autour de l'obstacle comme cela se produit en fluide parfait, lorsque le cylindre est animé d'une vitesse de rotation V_θ :

$$\psi = r \sin\theta(1 - \frac{1}{r^2}) + V_\theta \text{ Lg } r$$

JORDAN et FROMM (1972) déduisaient $f(R_\infty,t)$ de la relation :

$$f(R_\infty,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\psi_C - R_{\infty-1}\sin\theta(1 - \frac{1}{R_{\infty-1}^2})]d\theta$$

où ψ_C est la valeur déterminée numériquement au point voisin $R_{\infty-1}$ de la frontière extérieure.

Nous avons testé cette condition extérieure et obtenons les mêmes résultats que lorsque la condition suivante est fixée :

$$\psi_\infty = R_\infty \sin\theta(1 - \frac{1}{R_\infty^2})$$

III. DETERMINATION DU SEUIL D'APPARITION DU REGIME D'ECOULEMENT AVEC ALLEES TOURBILLONNAIRES EN FONCTION DU NOMBRE DE REYNOLDS.

Il est intéressant de rechercher le nombre de Reynolds au-dessus duquel les perturbations numériques s'amplifient et conduisent au régime d'allées tourbillonnaires et en dessous duquel les perturbations s'estompent et l'écoulement demeure symétrique.

Nous n'avons pas procédé à une étude fine conduisant à déterminer un nombre de Reynolds critique précis. Deux expériences numériques ont permis de définir un intervalle étroit.

Ainsi, il a été mis en évidence qu'à Re = 30, les perturbations s'amortissent comme le montre la figure 3a, où sont représentés la valeur du rotationnel à la paroi ω_p (θ=163°) et l'angle de recollement θ_{d_3} défini sur la figure 2.

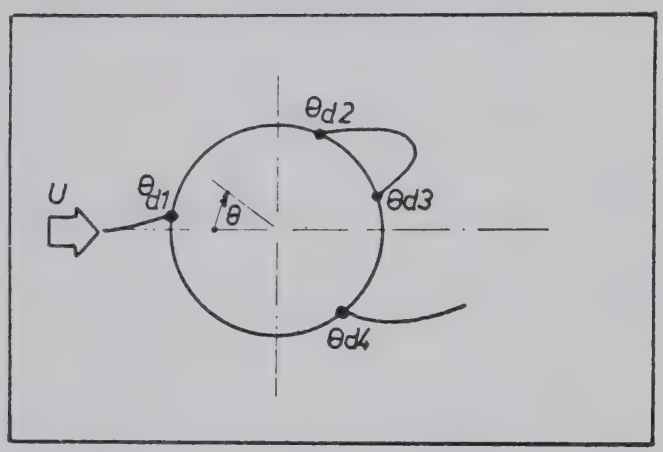


Figure 2 : Différents angles où s'annule le rotationnel à la paroi. θ_{d_1} : point d'arrêt amont ; θ_{d_2}, θ_{d_4} : angles de décollement ; θ_{d_3} : point de recollement.

Pour Re = 50, l'injection des perturbations conduit au régime d'allées tourbillonnaires comme on peut le voir sur les figures 3b, 4 ..

La visualisation des lignes de courant (figure 4) pour Re = 50 met en évidence le même mécanisme de production et de détachement des tourbillons à l'arrière du cylindre ou mécanisme de "vortex shedding" qu'à Re = 100. Ce point contribue à étayer la thèse qui affirme l'existence de ce mécanisme pour Re > 40 ; contrairement à l'idée défendue par certains auteurs selon laquelle ce régime ne s'établit que pour des nombres de Reynolds supérieurs à 90 - 100 (voir chapitre II), alors que pour

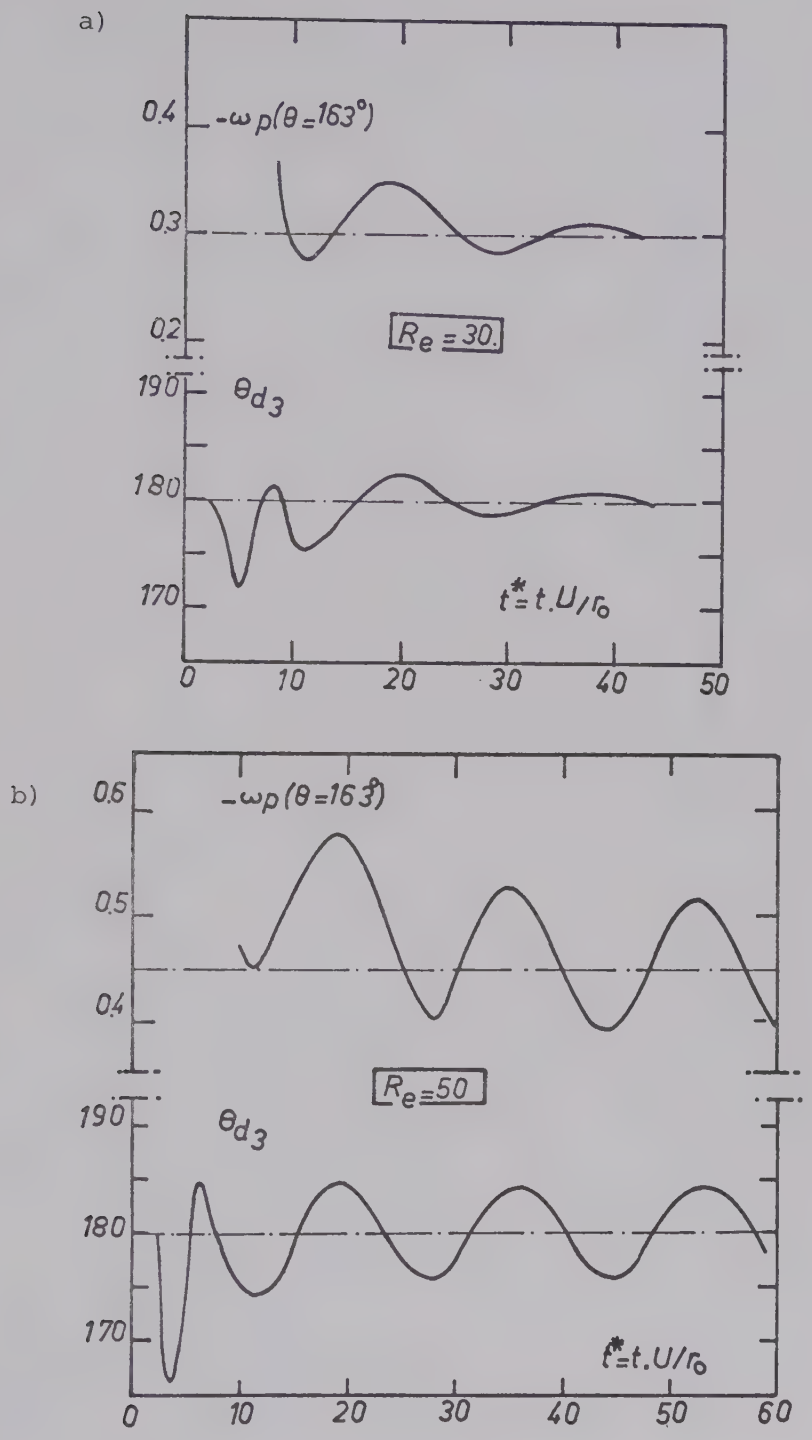


Figure 3 : Détermination du nombre de Reynolds critique Re_c d'apparition du régime d'allées tourbillonnaires. a) Re = 30 : amortissement des perturbations. b) Re = 50 : amplification et établissement du régime d'allées tourbillonnaires

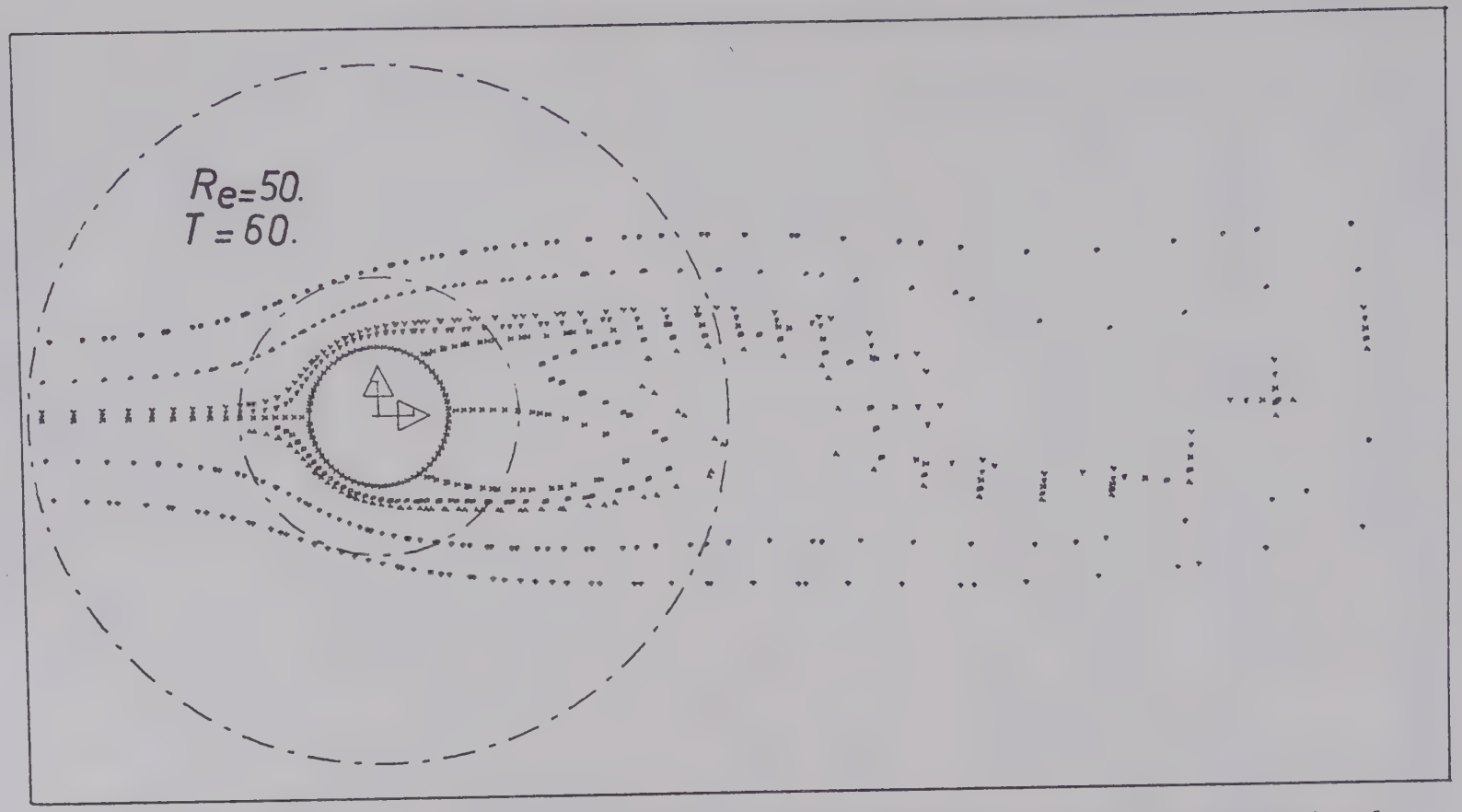


Figure 4 : Mise en évidence du régime d'allée tourbillonnaire pour Re = 50. Visualisation des lignes de courant (X : $\psi = 0$)

l'intervalle $40 < Re < 90 - 100$ les tourbillons restent attachés, le sillage battant comme un drapeau.

IV. CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES DE L'ECOULEMENT

Toutes les grandeurs de l'écoulement sont marquées d'une périodicité découlant du mécanisme séquentiel. En analysant la formation et le détachement des tourbillons conjointement avec une quelconque de ces grandeurs (traînée, portance, angles de décollement, pression à la paroi, rotationnel à la paroi,...) il est alors possible de mieux les décrire.

Nous allons faire cette analyse en prenant le rotationnel à la paroi ω_p (figures 6a à 6e). Ce choix est guidé par le fait que le signe de cette grandeur nous renseigne sur le sens de la vitesse du fluide près de la paroi, l'existence d'une valeur nulle indique l'apparition d'un point d'inflexion de profil de vitesse près de la paroi ($\omega_p = \partial u_\theta / \partial z$)

Un tourbillon (1) apparaît à la partie supérieure (t = 50). Ce tourbillon grossit, les lignes de courant de la partie supérieure le contournent en s'enroulant. Les valeurs du rotationnel à la paroi dans la zone de recirculation sont bien plus faibles que les valeurs existant dans la partie inférieure arrière de l'obstacle.

Le tourbillon (1) voit sa taille augmenter, alimenté par la couche décollée. Alors que l'angle de décollement θ_{d_2} évolue très peu, l'angle de recollement θ_{d_3} se déplace fortement vers l'aval (t = 52,5). Les forces de viscosité détachent le tourbillon (1) lorsqu'il atteint une taille critique (évaluée à l'aide de l'angle $(\theta_{d_3} - \theta_2) = 53°$ pour $Re = 200$). Il se forme simultanément un tourbillon (2) à la partie inférieure (t = 55). Notons que l'apparition de ce deuxième tourbillon qui coïncide avec le détachement du tourbillon (1) est précédée par un minimum nul de la valeur du rotationnel ω_p sur la partie inférieure aval où va se produire cette apparition (figure 6c) ; ce minimum nul témoigne d'un point d'inflexion de la vitesse angulaire.

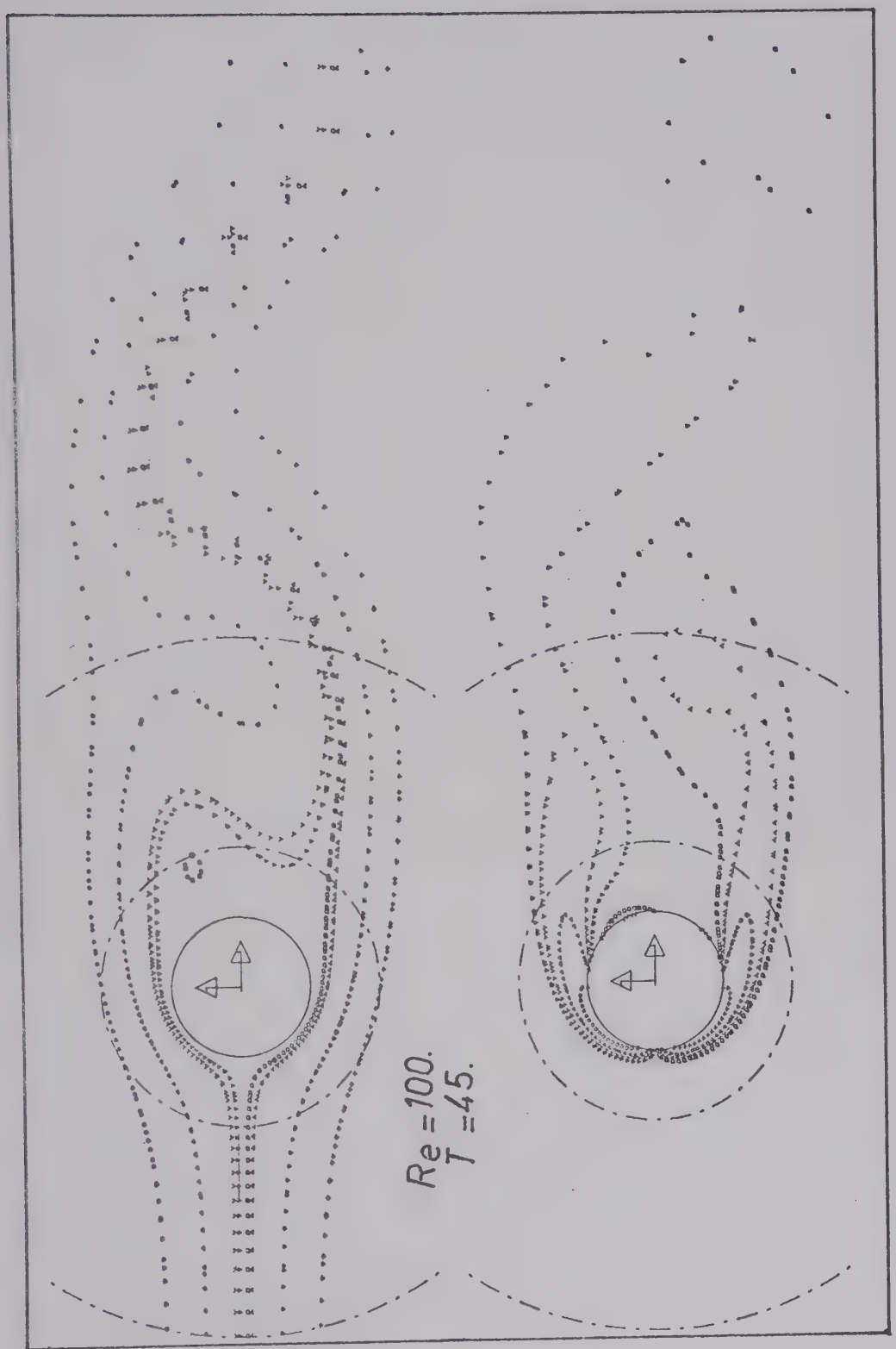


Figure 5a

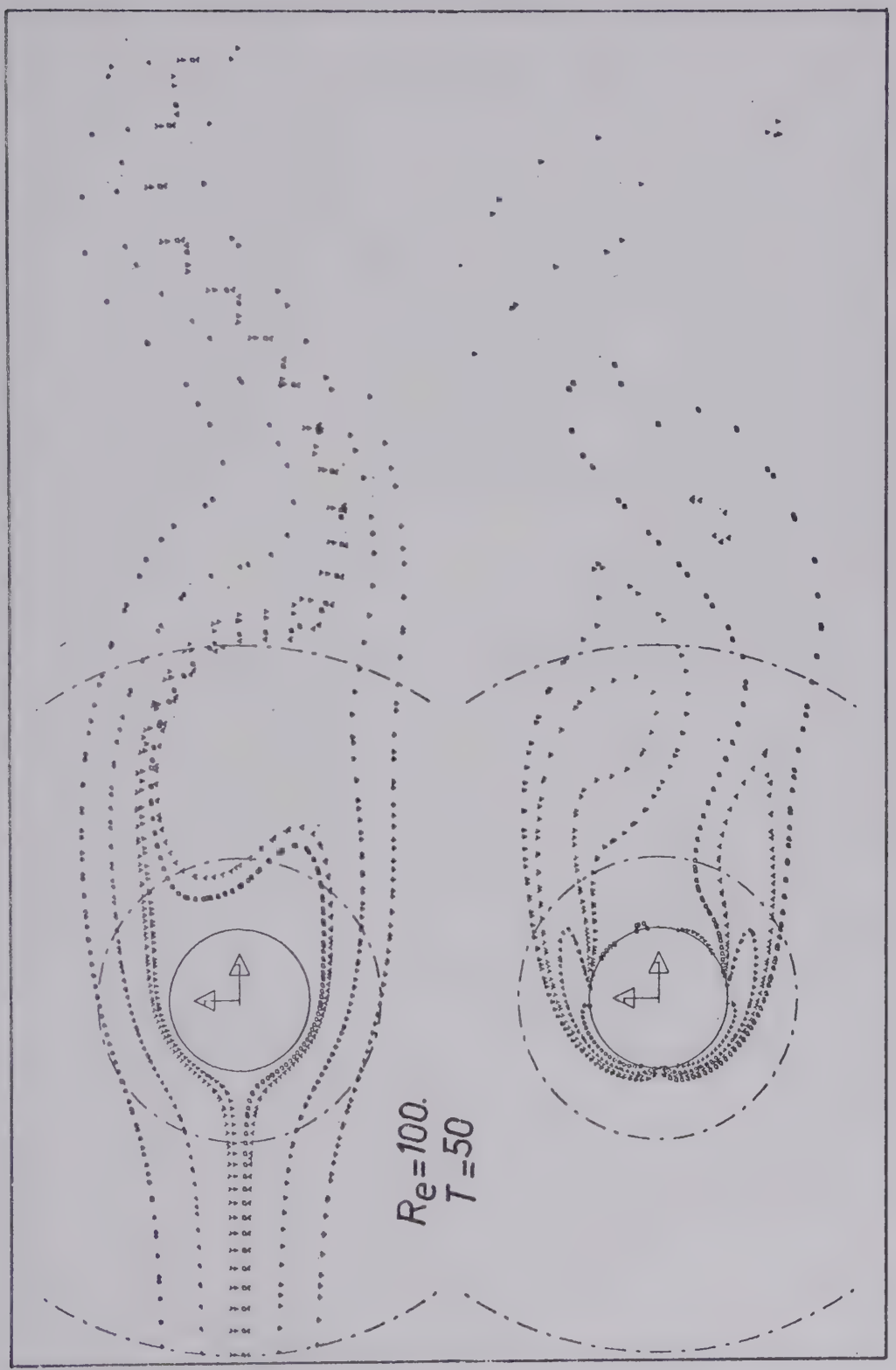


Figure 5b

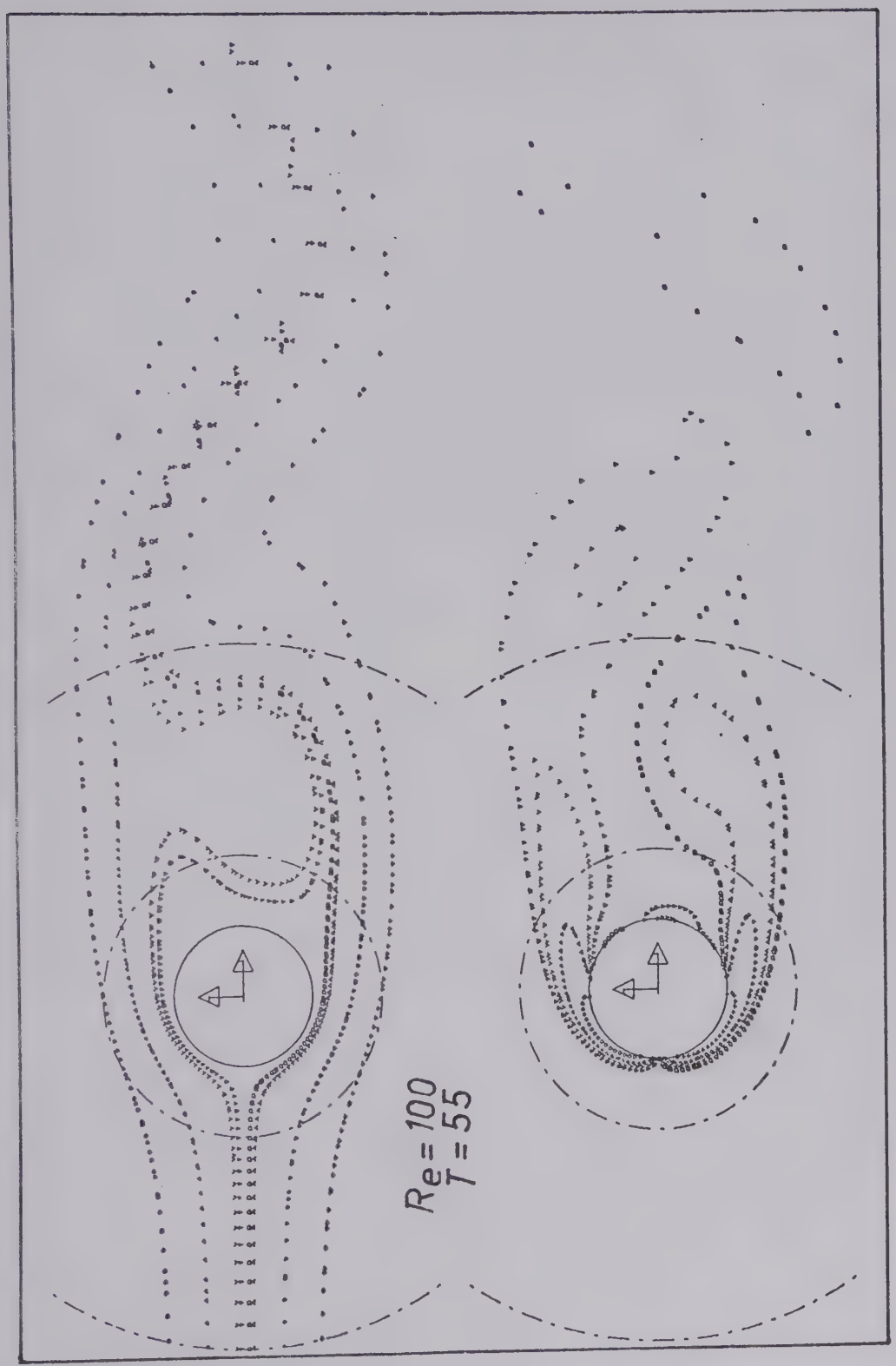


Figure 5c

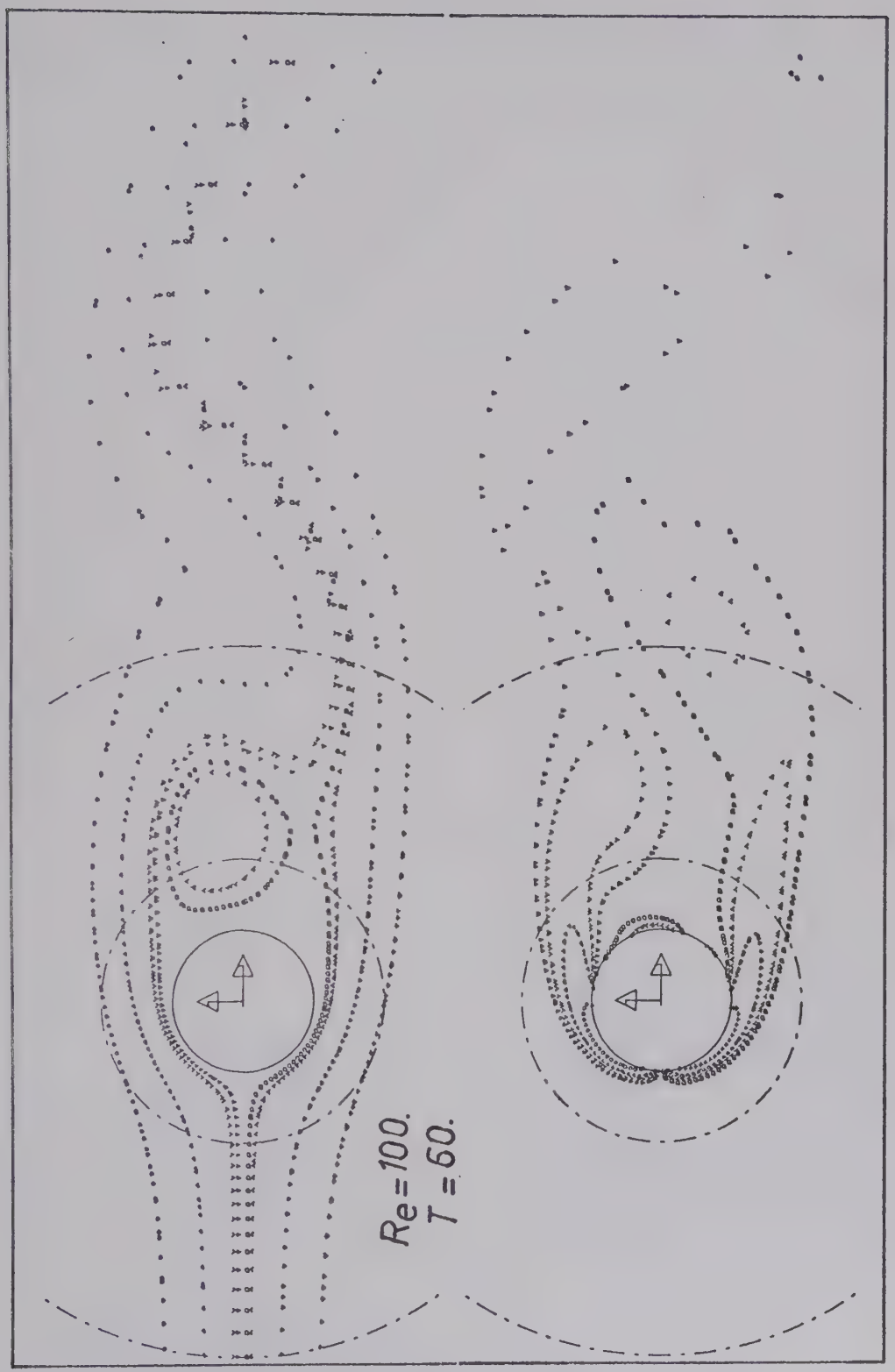


Figure 5d

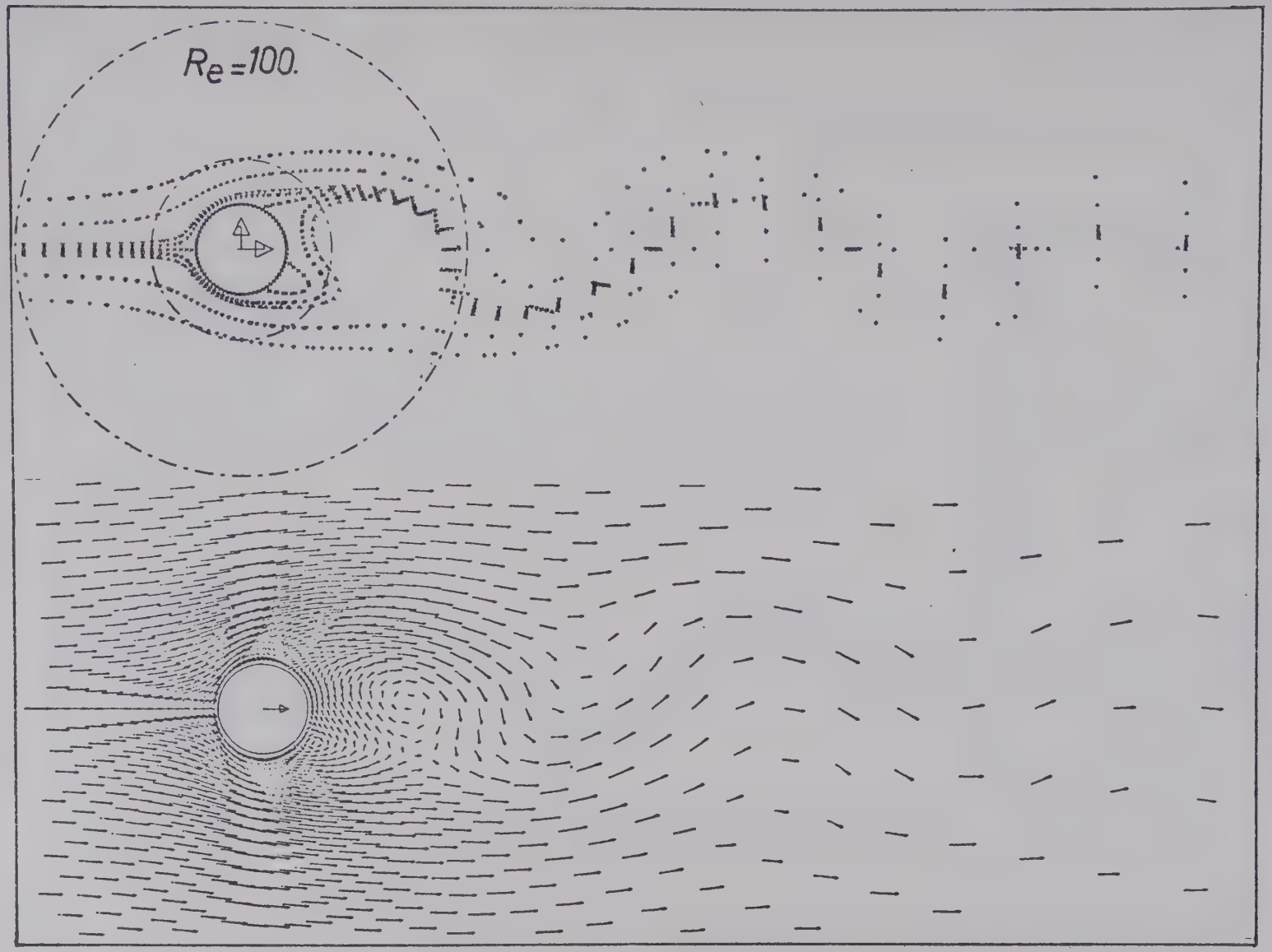


Figure 5e : Visualisation des lignes de courant, isorotationnelles et champ de vitesse pour Re = 100, en fonction du temps.

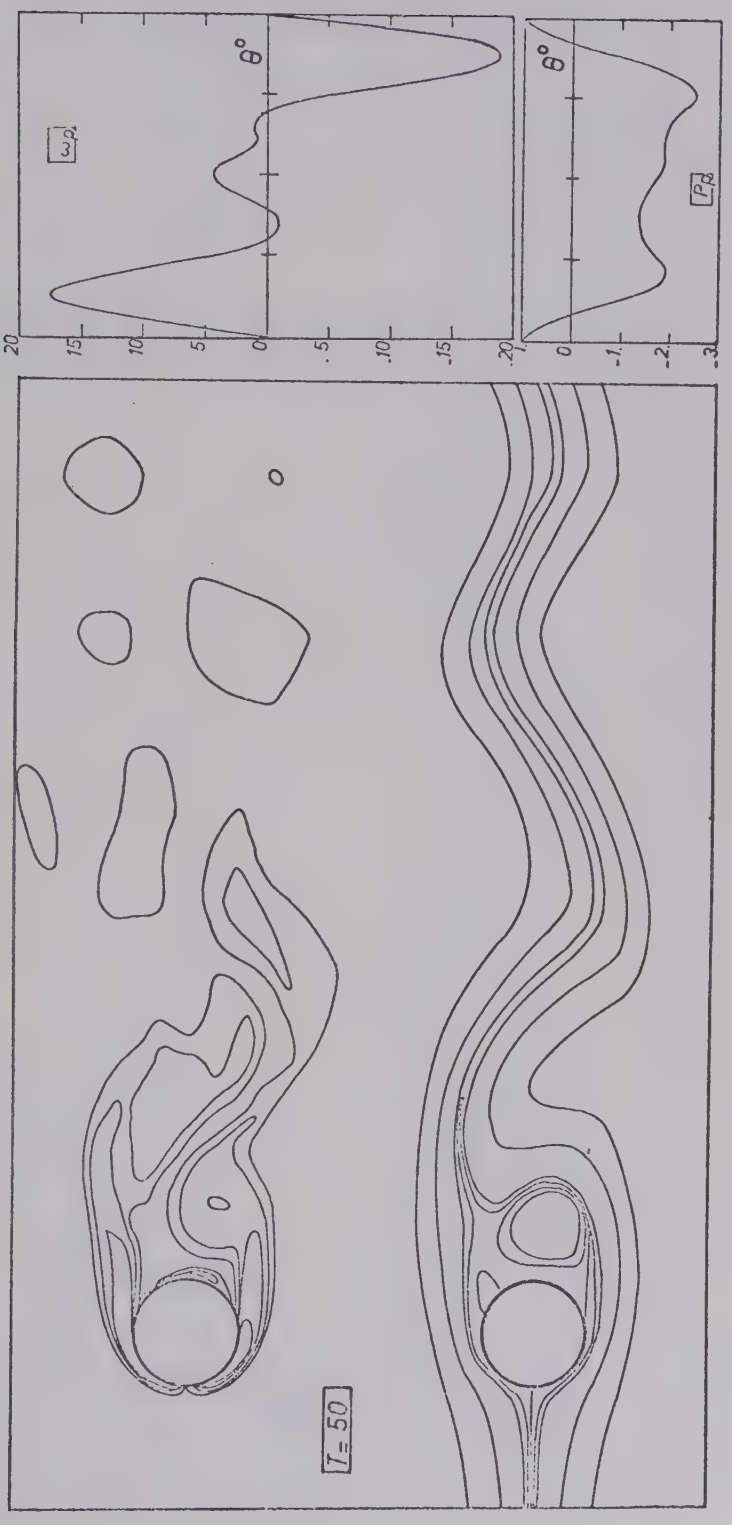


Figure 6a

Figure 6b

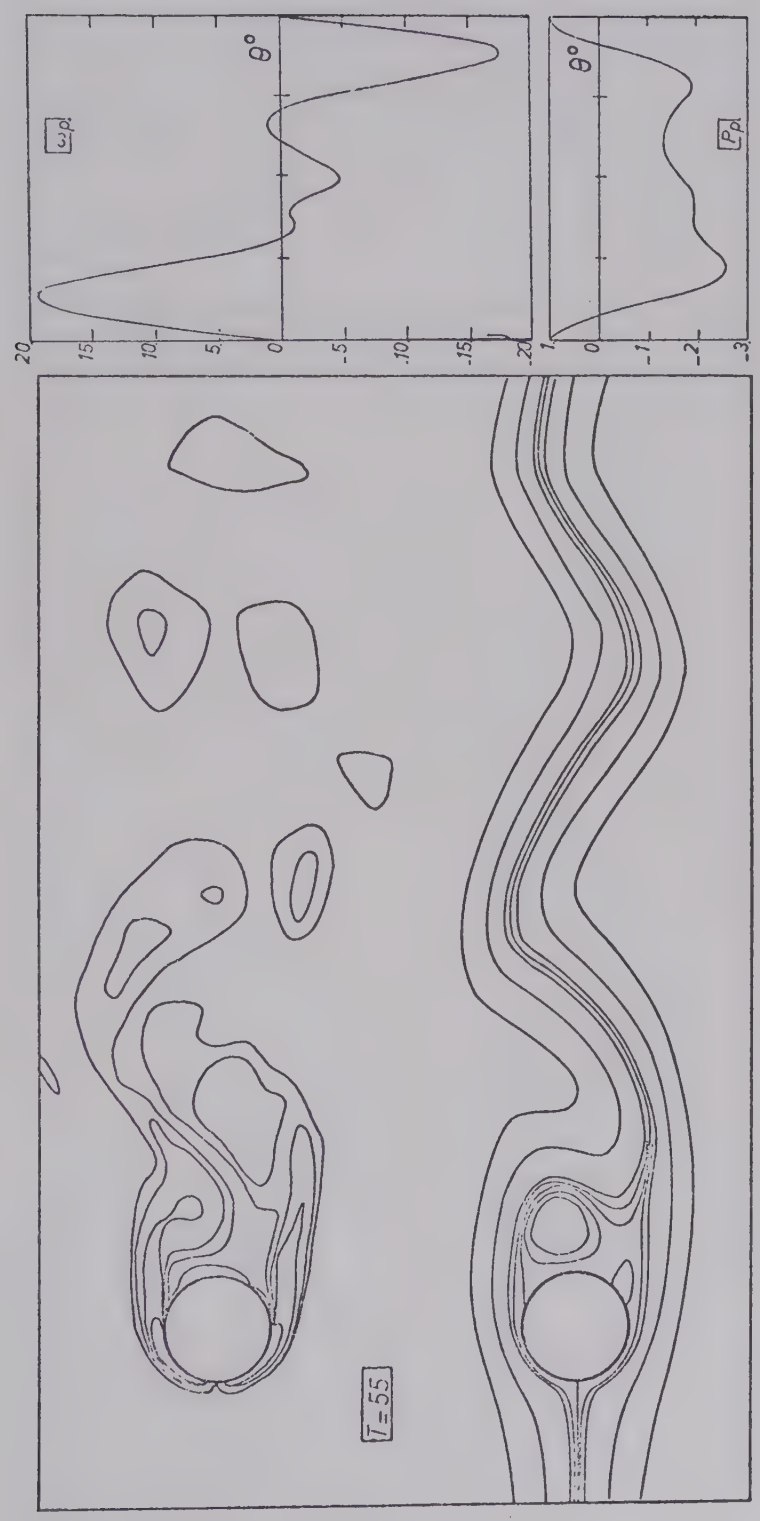


Figure 6c

Figure 6d

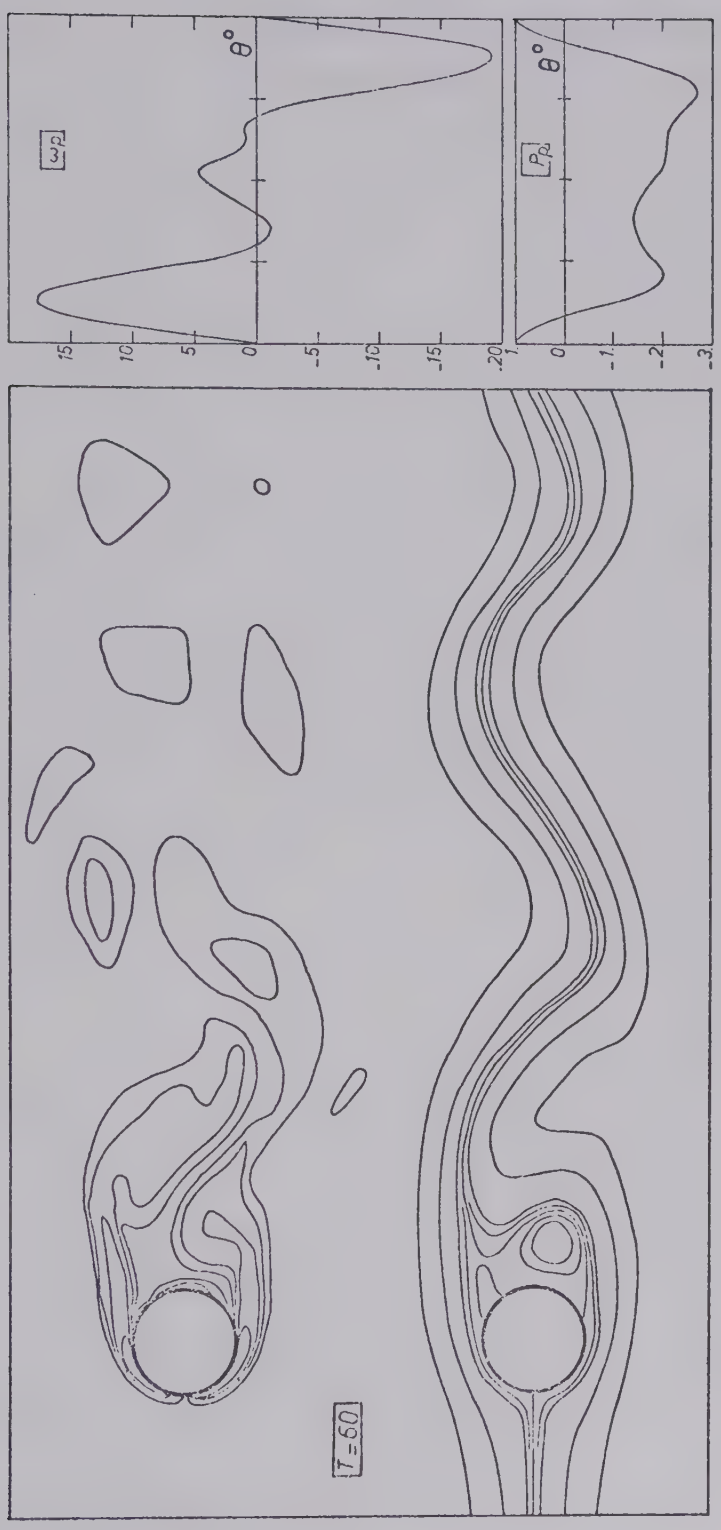


Figure 6e

Figures 6 : Visualisation des lignes de courant et des lignes isorotationnel au cours d'une période à intervalles réguliers pour Re = 200.

Le tourbillon (2) suit une évolution analogue à celle décrite précédemment, le tourbillon (1), libéré des contraintes visqueuses pariétales, tourne rapidement (fortes valeurs de ω_p à la partie supérieure t = 55) alors qu'il est convecté vers l'aval.

Au temps t = 57,5, l'existence d'un minimum nul du rotationnel ω_p à l'angle $\theta \simeq 120°$ précède le détachement immédiat du tourbillon inférieur (2) et simultanément l'apparition d'un tourbillon (1) à la partie supérieure, comme on peut le voir sur la figure 6e, au temps t=60. Avec cette nouvelle étape recommence le mécanisme séquentiel décrit plus haut ; il s'est écoulé une période (Re = 200 ; T = 10,53).

Les variations des oscillations du point d'arrêt amont θ_{d_1} des angles de décollement θ_{d_2}, θ_{d_4}, ainsi que le point de recollement θ_{d_3} sont données sur les figures 7 (Re = 100) et 8 (Re = 200). Le point de recollement θ_{d_3} correspond alternativement au point de recollement de la couche décollée supérieure et inférieure. Les angles de décollement θ_{d_2} et θ_{d_4} sont en opposition de phase. La variation dans le temps de ces angles est réglée par le mécanisme de formation des tourbillons. Ainsi, lorsque l'angle θ_{d_2} décroît (déplacement du point de recollement supérieur vers l'amont) le tourbillon attaché est situé sur la partie supérieure et voit sa taille augmenter, le point de décollement inférieur se déplaçant vers l'aval de l'obstacle.

Lorsque le tourbillon supérieur se détache, l'angle θ_{d_1} décroît et l'apparition du tourbillon attaché à la partie inférieure déplace l'angle θ_{d_4} vers l'amont. La valeur de l'angle de décollement (θ_{d_2} ou $2\pi-\theta_{d_4}$) est de 116° $\pm$ 2,25 et 110° $\pm$ 3 respectivement pour Re = 100 et 200. Il est à noter que la valeur pour Re = 100 diffère sensiblement de la valeur 112,7° déterminée pour l'écoulement symétrique.

Nous avons déterminé la vitesse de translation des tourbillons ou vitesse de phase dans le sillage. Nous avons trouvé :

$U_t = 0,61$ pour $x/r_o = 4,4$
$U_t = 0,68$ pour $x/r_o = 10,16$ et $18,30$

Signalons que la vitesse de "convection" est de l'ordre de 0,8 pour les écoulements turbulents.

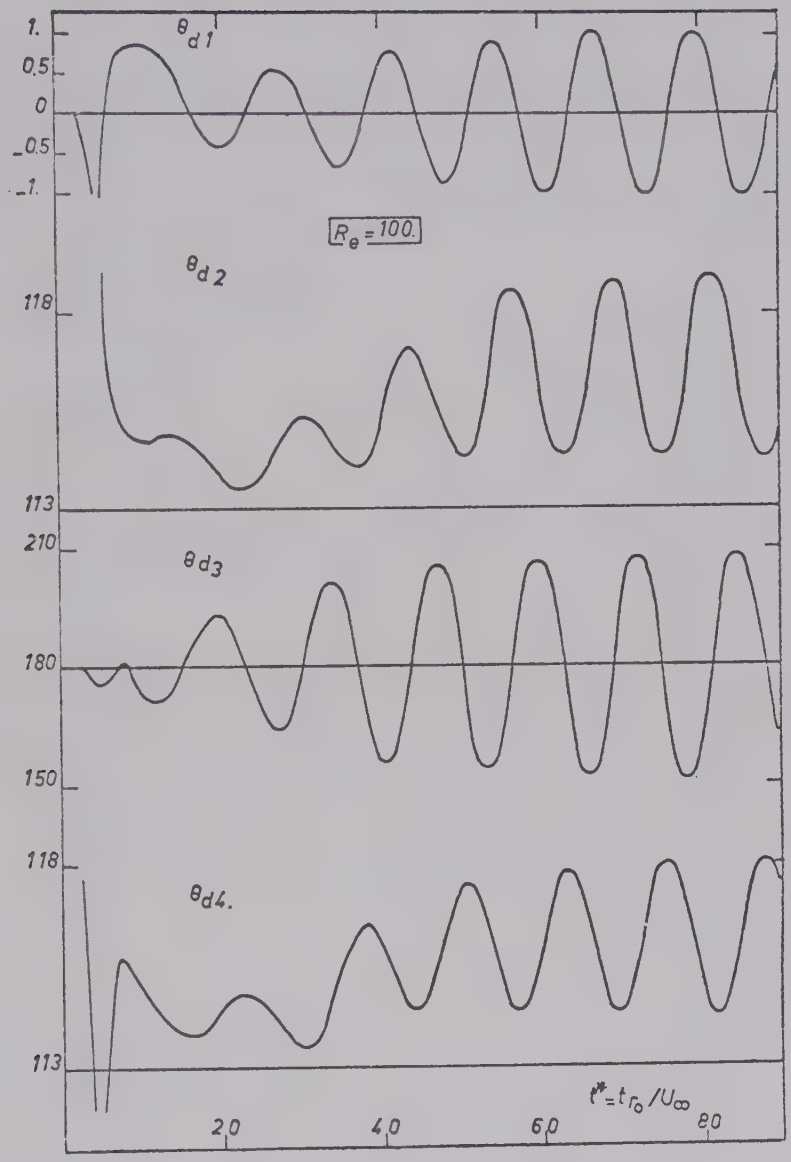


Figure 7 : Variation des angles du point d'arrêt θ_{d_1}, du point de décollement θ_{d_2}, θ_{d_4} et du point de recollement θ_{d_3} en fonction du temps.

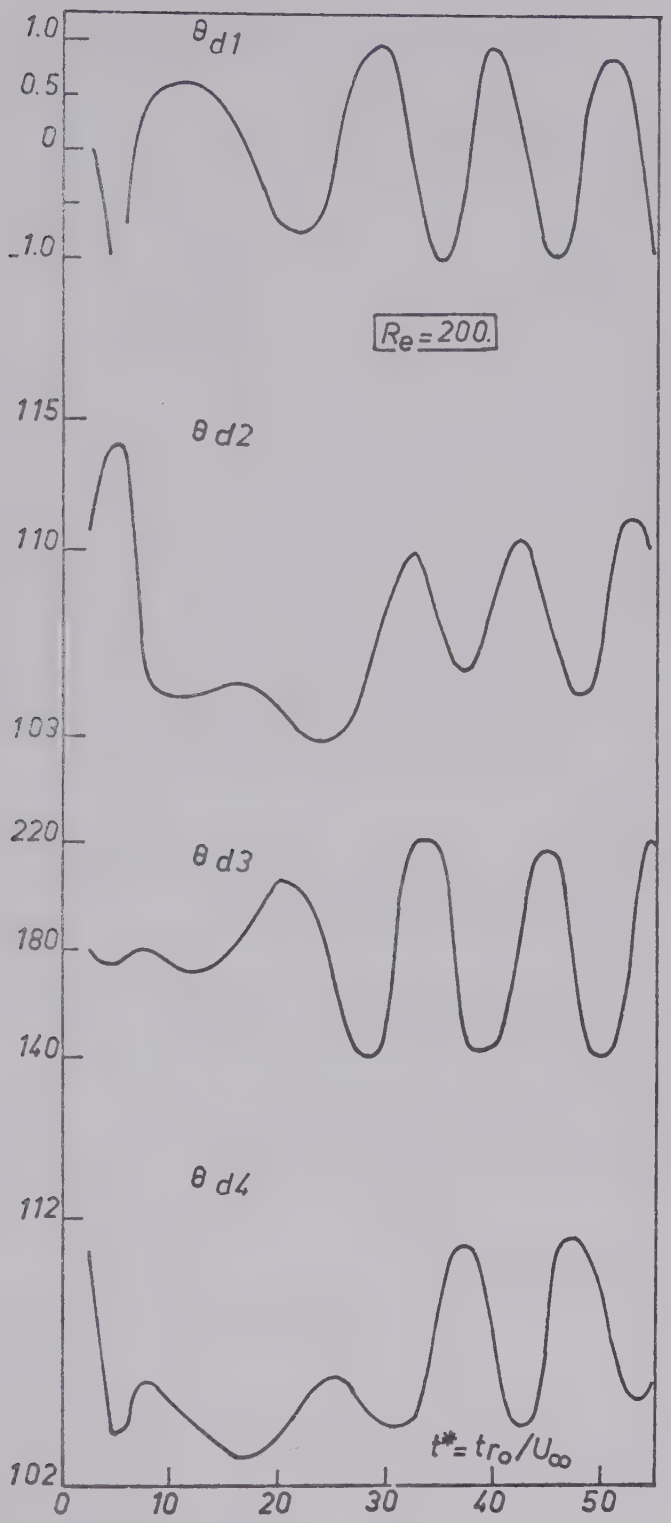


Figure 8 : Variation des angles du point d'arrêt θ_{d_1}, du point de décollement θ_{d_2}, θ_{d_4} et du point de recollement θ_{d_3} en fonction du temps.

IV.1. FORCES INDUITES SUR L'OBSTACLE

L'instationnarité de l'écoulement induit sur l'obstacle un système de forces périodiques exprimées par les quantités réduites : traînée Cx, portance Cy (figure 9).

La fréquence d'oscillation du coefficient de traînée est égale au double de la fréquence d'oscillation du coefficient de portance, ce dernier variant à la fréquente St.

On n'observe pas d'oscillations pour les premières périodes du cylce de détachement des tourbillons en raison de la forte variation du coefficient de traînée dans le régime transitoire. Dans le régime établi, où la valeur moyenne du coefficient de traînée est constante, les oscillations sont perceptibles surtout pour $Re = 200$. Il est à remarquer que les oscillations du coefficient de traînée sont bien plus faibles que celles du coefficient de portance.

$Re = 100$: $Cx = 1,30 \pm 0,01$ $\quad Cy = \pm 0,2$

$Re = 200$: $Cx = 1,27 \pm 0,035$ $\quad Cy = \pm 0,4$

Ces valeurs de Cx sont en bon accord avec les valeurs expérimentales.

Enfin, on peut voir également que ces efforts sont déphasés. L'obstacle est également soumis à un couple oscillant d'amplitude très faible (0,007 pour $Re = 200$).

IV.2. CHAMP DE VITESSES

La périodicité de l'écoulement est bien révélée par les figures 10 et 11 qui montrent la variation des composantes u_θ et u_r de la vitesse ainsi que celle du rotationnel . Ces résultats sont en bon accord avec les signaux anémométriques relevés sur l'axe par ROSHKO (1954) FARGUES (1976) et ceux que nous avons relevés sur notre propre banc expérimental (chapitre VII).

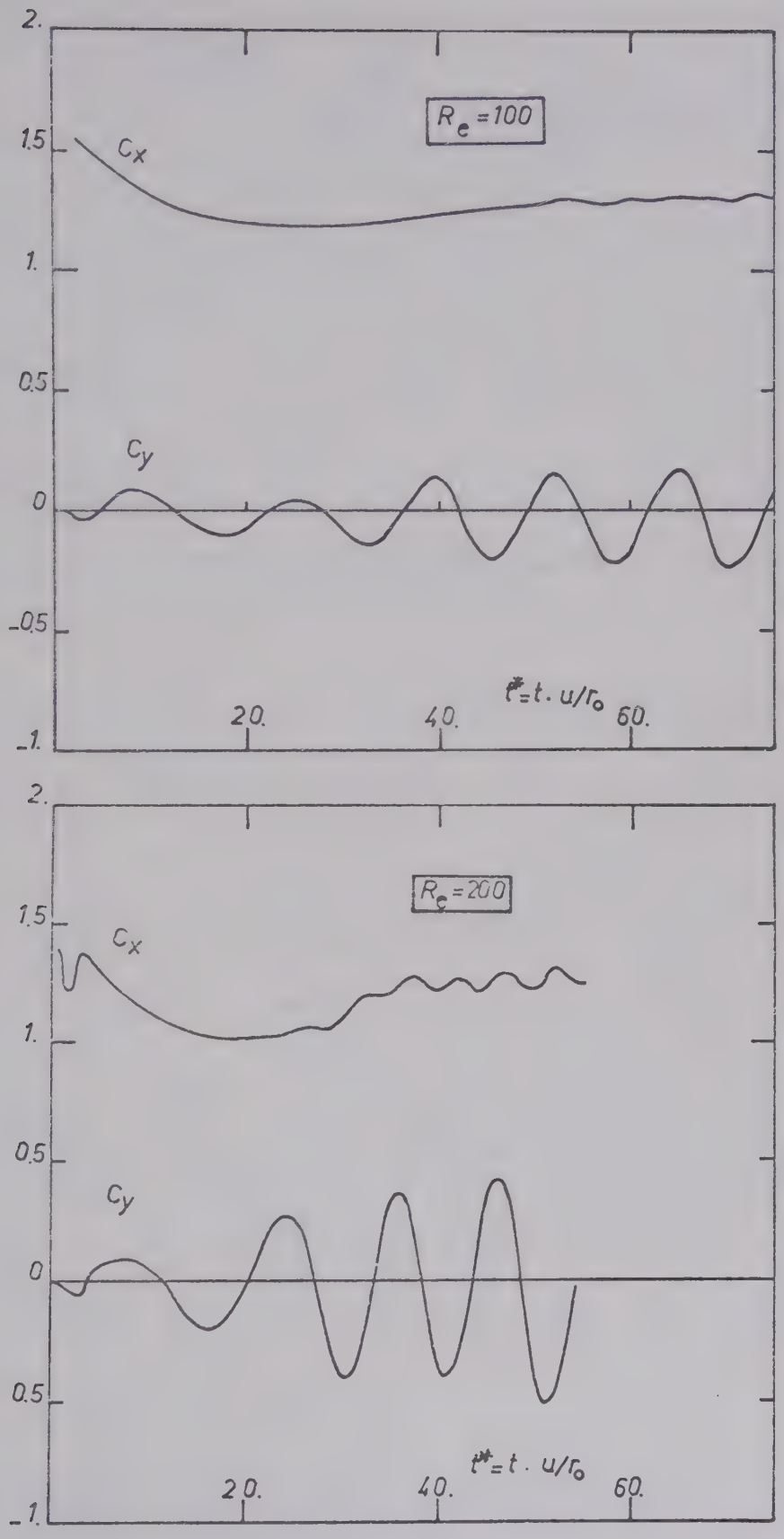


Figure 9 : Variation au cours du temps du coefficient de traînée Cx et de la portance Cy.

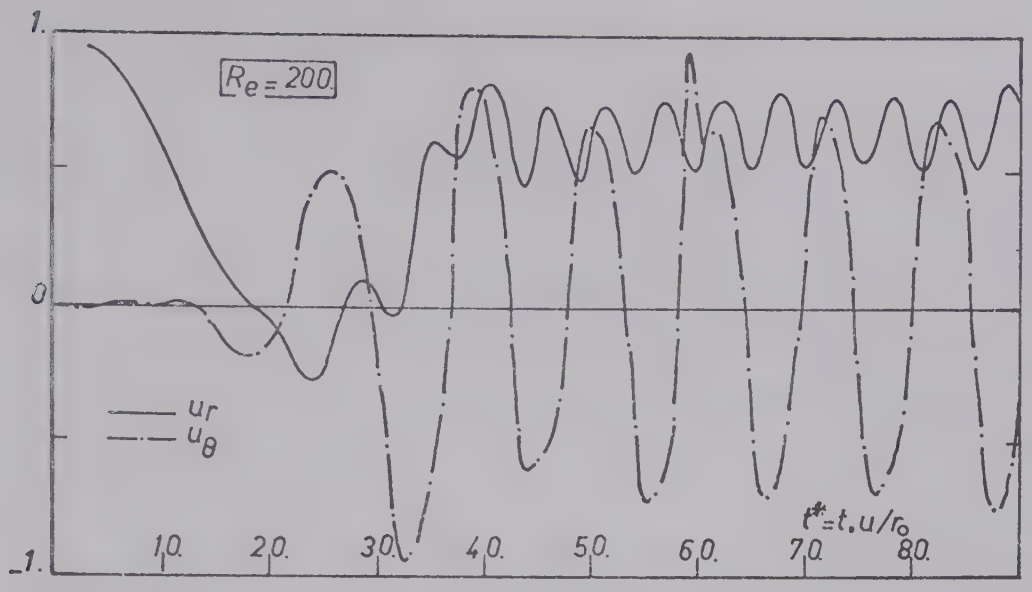


Figure 10 : Variation temporelle des composantes radiale et angulaire au point θ = 180°, r = 25,5

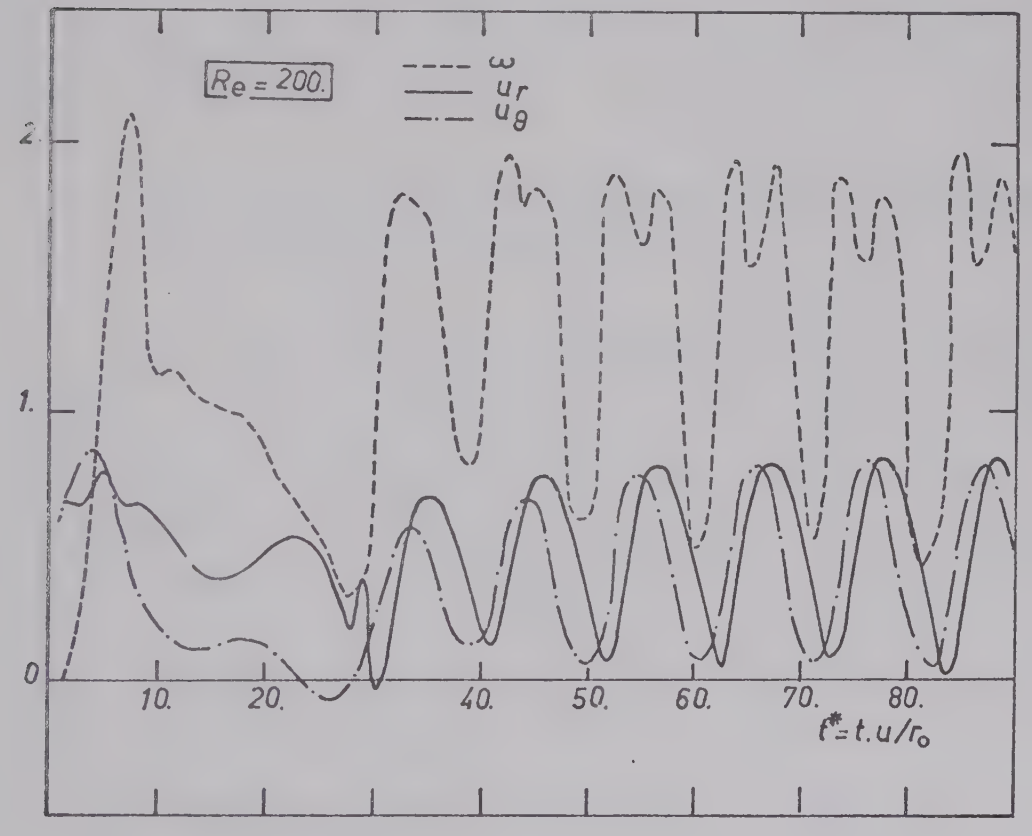


Figure 11 : Variation temporelle des composantes radiale (U_r) et angulaire (U_θ) de la vitesse et du rotationnel ω à un point proche de l'obstacle : θ = 152°, r = 2,67

Le long de la ligne centrale aval, les tourbillons, qu'ils soient émis par la partie supérieure (sens destrogire) ou produits par la partie inférieure (sens levogire) induisent une vitesse relative axiale u_r négative. Ainsi, la composante de la vitesse u_r sur l'axe est indifférente au sens de rotation des tourbillons et possède une fréquence égale à 2 St. Il n'en va pas de même pour la composante verticale qui oscille à la fréquence St, cette composante étant sensible au sens de rotation des tourbillons.

Sur la figure 5f, nous avons calculé pour Re = 100, le champ instantané des vitesses. Il est à remarquer que l'influence de l'allée tourbillonnaire se fait sentir à une grande distance transversale de la ligne centrale aval comme en témoigne l'inclinaison du vecteur vitesse ; en moyenne la vitesse est horizontale dans cette région de l'écoulement. Ceci est également observé dans la zone externe de l'écoulement turbulent à nombre de Reynolds élevé et mis à profit pour piloter des mesures échantillonnées (DAVIES, 1976).

IV.3. COMPARAISON DE LA FREQUENCE DE STROUHAL St NUMERIQUE AVEC LES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Nous avons donné dans le chapitre II diverses lois expérimentales qui relient la fréquence réduite de Strouhal St au nombre de Reynolds Re. Ces lois sont rapportées graphiquement sur la figure 12. A l'aide des courbes de variation temporelle de plusieurs quantités (vitesses, angles de décollement), nous avons pu déterminer avec précision la fréquence réduite de Strouhal St. Nous avons ainsi obtenu :

pour $Re = 100$ $\quad$ $St = 0,16$

et pour $Re = 200$ $\quad$ $St = 0,19$

Physiquement, les courbes expérimentales présentent une zone chaotique très mal définie (zone hachurée sur la figure). Ce phénomène révèle l'apparition de la turbulence dans le sillage.

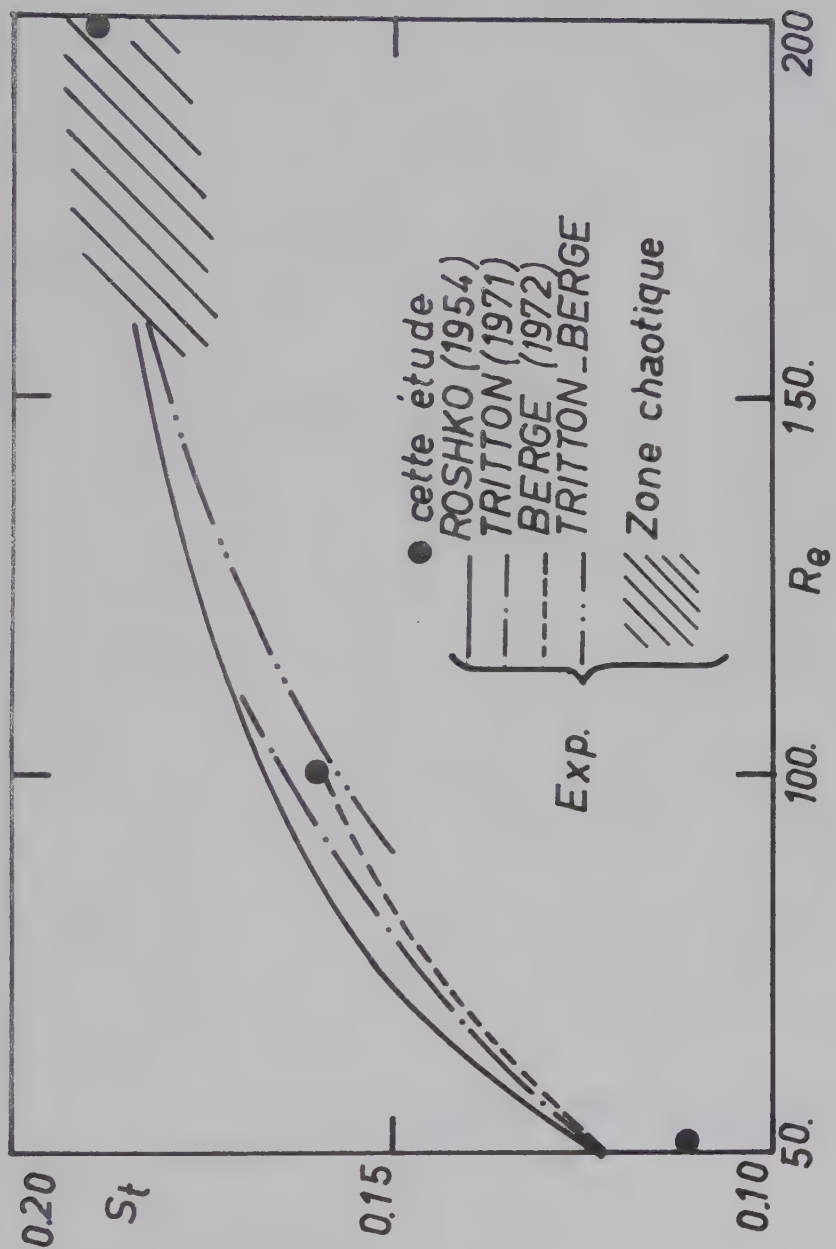


Figure 12 : Diverses lois expérimentales qui relient le nombre de Strouhal St au nombre de Reynolds Re.

La valeur déterminée pour $Re = 200$ coïncide avec l'extrapolation des lois expérimentales.

Pour un maillage lâche, $\delta\theta = \delta Z = \pi/32$, nous avions obtenu $St = 0,154$ à $Re = 100$ qui est une valeur légèrement inférieure à toutes les données expérimentales. Ceci révèle la présence d'une viscosité numérique qui conduit à un nombre de Reynolds effectif de 85, si on prend la valeur moyenne des diverses lois. Avec le maillage plus fin $\delta\theta = \delta Z = \pi/45$, finalement adopté, la valeur du nombre de Strouhal déterminée est en bon accord avec la valeur prédite par les lois expérimentales.

V. ETUDE DU CHAMP THERMIQUE

Comme le champ dynamique, le champ thermique est périodique. Si la partie amont de l'obstacle est très peu affectée par le mécanisme séquentiel de production et de détachement de tourbillons, le sillage thermique fluctue fortement. Sa structure est entièrement conditionnée par l'allée tourbillonnaire comme en témoignent les visualisations numériques du champ thermique où l'on peut déceler des "îlots" de fluide à température relativement élevée, loin à l'arrière de l'obstacle (figures 15 et 16). Cependant dans la zone proche de l'obstacle, la température n'est que très peu affectée par le mécanisme séquentiel de l'écoulement. Ceci s'explique par la faible intensité des vitesses qui règnent dans cette partie de l'écoulement.

V.1. ETUDE DU TRANSFERT THERMIQUE, NOMBRE DE NUSSELT LOCAL ET MOYEN

Le transfert thermique, très important sur la partie amont de l'obstacle, décroît très rapidement lorsqu'on se déplace vers l'arrière du cylindre pour atteindre un minimum à une position angulaire légèrement à l'aval du point de décollement (figure 13).

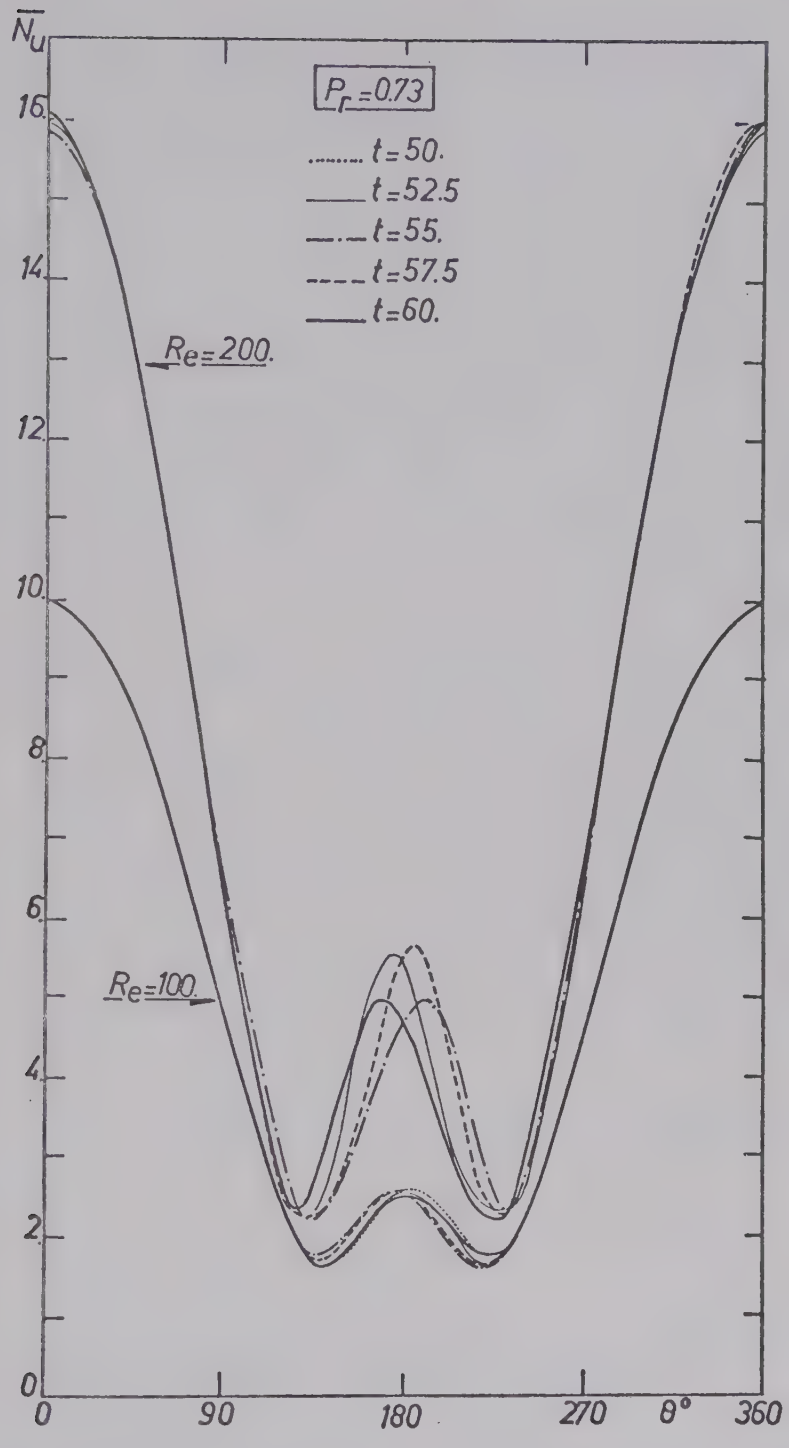


Figure 13 : Variation du nombre de Nusselt local

Les variations périodiques du nombre de Nusselt local Nu sont d'autant plus importantes que le nombre de Reynolds augmente. Ces variations sont localisées dans la zone de culot, la seule qui soit affectée par le mécanisme de formation séquentielle des tourbillons. Ces oscillations sont presque imperceptibles sur le nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}$ pour $Re = 100$, mais atteignent des amplitudes de 0,05 pour $Re = 200$ et sont facilement discernables sur la figure 14 où sont représentées les variations dans le temps de $\overline{Nu}$. Comme pour le coefficient de traînée Cx, ces oscillations périodiques ont une fréquence de 2 St, le transfert de chaleur global n'étant pas affecté par la position (inférieure ou supérieure) du tourbillon attaché, mais par le nombre de tourbillons détachés ou produits à l'arrière du cylindre.

Sur le tableau I, nous avons fait une comparaison avec différents résultats numériques et expérimentaux du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}$. La valeur de $\overline{Nu} = 5,250$ pour $Re = 100$ et $Pr = 0,73$ est en bon accord avec les autres résultats. Pour $Re = 200$, notre étude surestime d'environ 11% le transfert thermique par rapport aux lois expérimentales. Nous pensons que ceci est imputable à la taille du maillage trop lâche, tout au moins pour la partie centrale amont. JAIN et GOEL (1976), bien qu'utilisant un pas $\pi/60$ près de l'obstacle, obtenaient des résultats pour $Re = 200$ qui surestimaient légèrement le nombre de Nusselt moyen par rapport aux lois expérimentales.

Les lois expérimentales prédisent un comportement du nombre de Nusselt moyen :

$$\overline{Nu}\ Re^{-1/2}\ Pr^{-1/3} = cte$$

Il n'existe pas d'expression simple liant le nombre de Nusselt local Nu aux nombres de Reynolds et de Prandtl pour le régime de convection forcée autour d'un obstacle. La théorie de la couche limite thermique donne cependant pour les grands nombres de Reynolds dans la zone non décollée des expressions sous forme de développements très élaborés. Nous donnons dans le tableau II, les différents résultats de divers auteurs selon JEANG et al (1978) et dans lequel nous avons porté nos résultats.

	Numérique		Expérimental			
Nombre de Reynolds Re	Cette étude Pr = 0,73	Jain et Goel (1976) Pr = 0,73	Collis et Williams (1959) (air)	Hilpert (1933) (air)	Churchill et Berstein (1977) Pr = 0,73	Mac Adams (1954) (air)
100	5.250	5.52	5.141	5.259	5.23	5.23
200	8.062	7.63	7.749 (extrapolé)	7.264	7.218	7.218

Tableau n° I : Comparaison du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}$ pour le régime avec allée tourbillonnaire

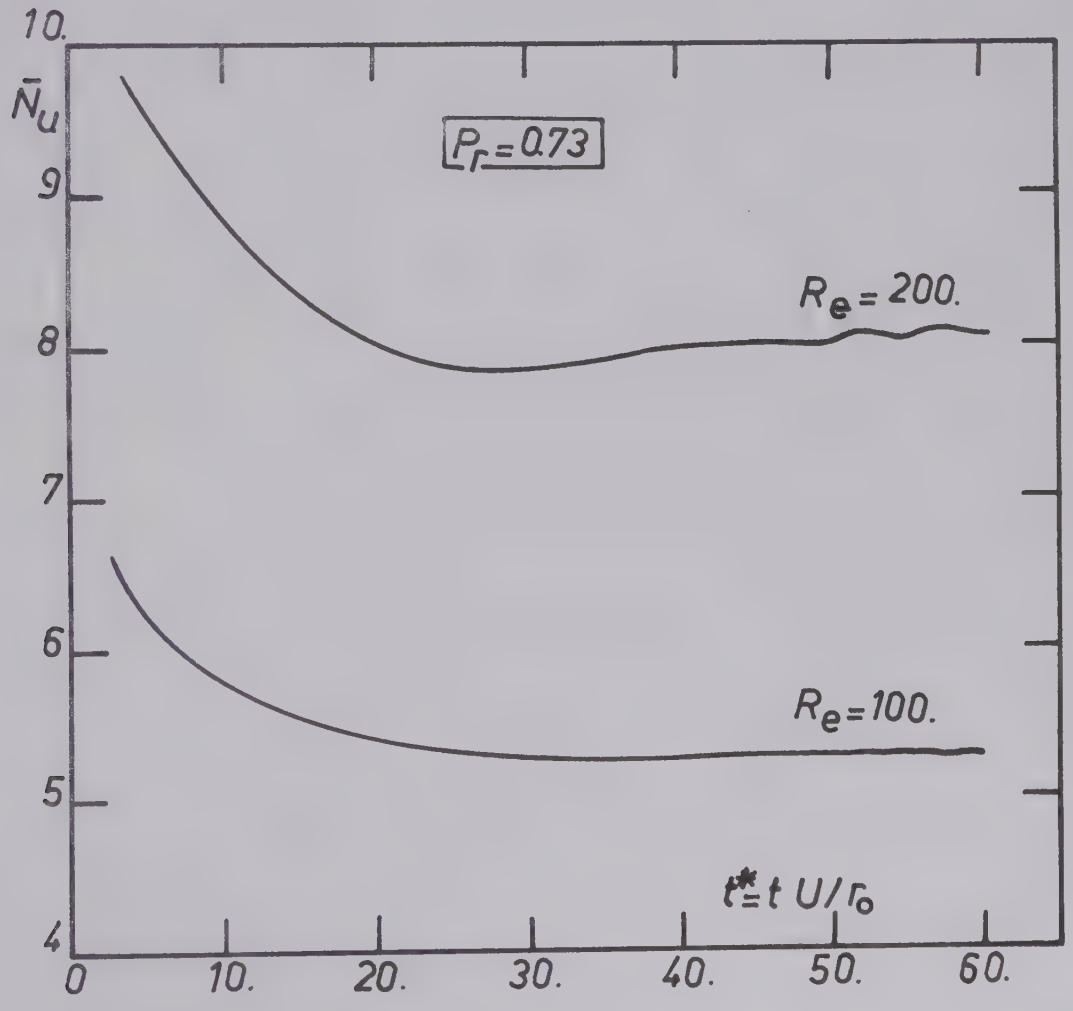


Figure 14 : Variation temporelle du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}$

Position	Cette étude. Equations complètes.			Couche limite. Basé sur : $U_e/U_\infty = 1.8157(x/r_o) - 0.2714(x/r_o)^3 - 0.0473(x/r_o)^5$; $x = -\cos\theta . r_o$			
	Pr = 0,75			JENG,LEE DEWITT	JENG,LEE DEWITT*	CHAO et FAGBENLE	FROSSLING
θ°	Re = 40	Re = 100	Re = 200	Pr = 0,7	Pr = 0,73	Pr = 0,7	Pr = 0,7
0	0.9529	0.9352	1.1278	0.9274	0.9405	0.9450	0.9449
16,2	0.9356	0.9757	1.0909	0.9144	0.9343	0.9339	0.9339
25,3	0.9111	0.9477	1.0513	0.8957	0.9083	0.9186	0.9186
34,2	0.8781	0.9093	0.9966	0.8681	0.8803	0.8948	0.8949
44,5	0.8286	0.8521	0.9173	0.8422	0.8541	0.8542	0.8546
55,9	0.7621	0.7746	0.8135	0.7748	0.7857	0.7925	0.7897
62,8	0.7293	0.72376	0.7481	0.7257	0.7359	0.7242	
67,5	0.6837	0.6825	0.6967	0.6724	0.6819	0.6560	
71,3	0.7113	0.6501	0.6571	0.5772	0.5853	0.6055	

* Modifié par nous (au 1er ordre).

Tableau n°II : Comparaison du nombre de Nusselt local Nu $Re_\infty^{-1/2}$ obtenu par étude des résultats acquis par la théorie de la couche limite (JENG et al. 1978)

U_e : vitesse extérieure à la couche limite.

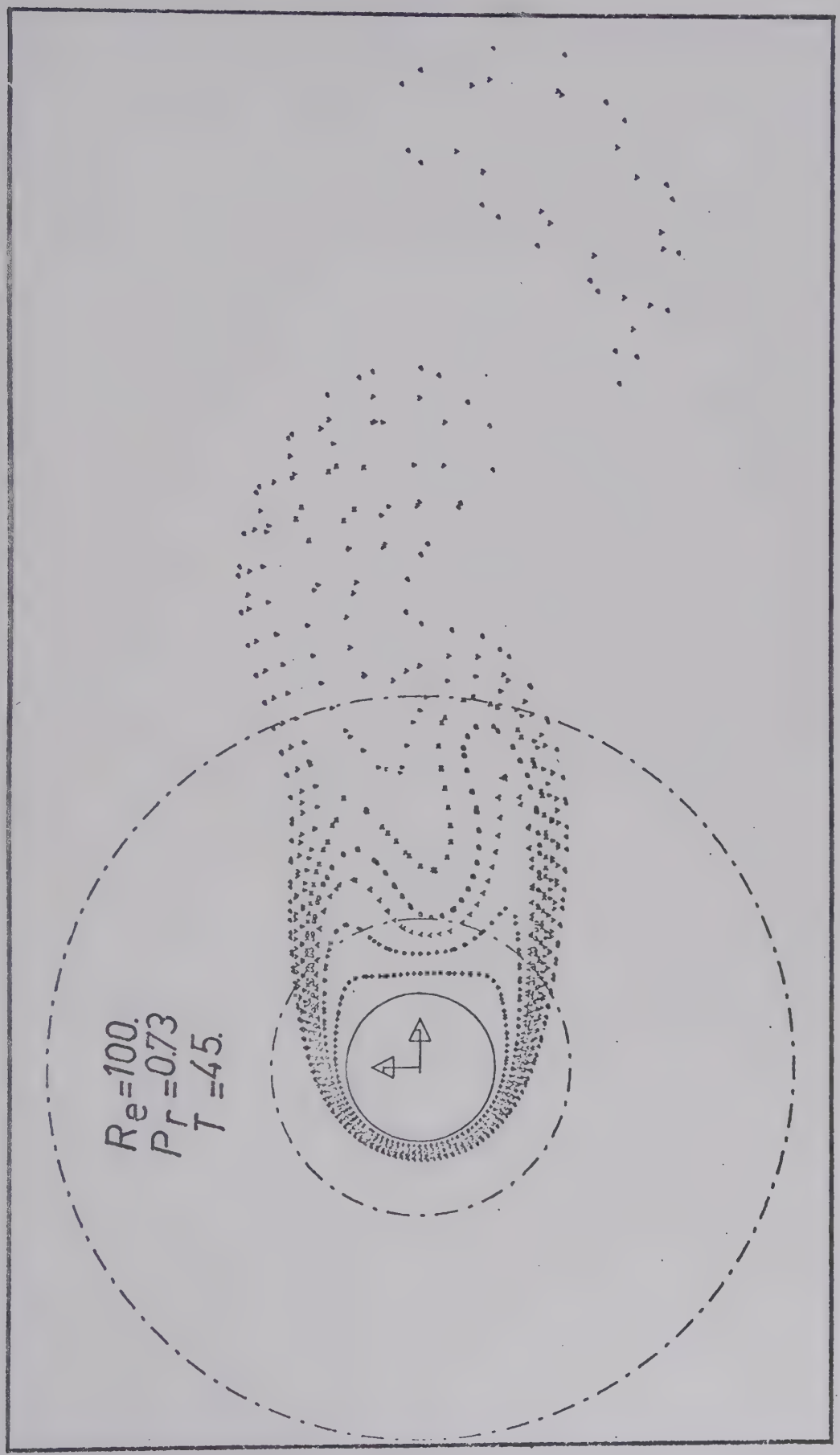


Figure 15a

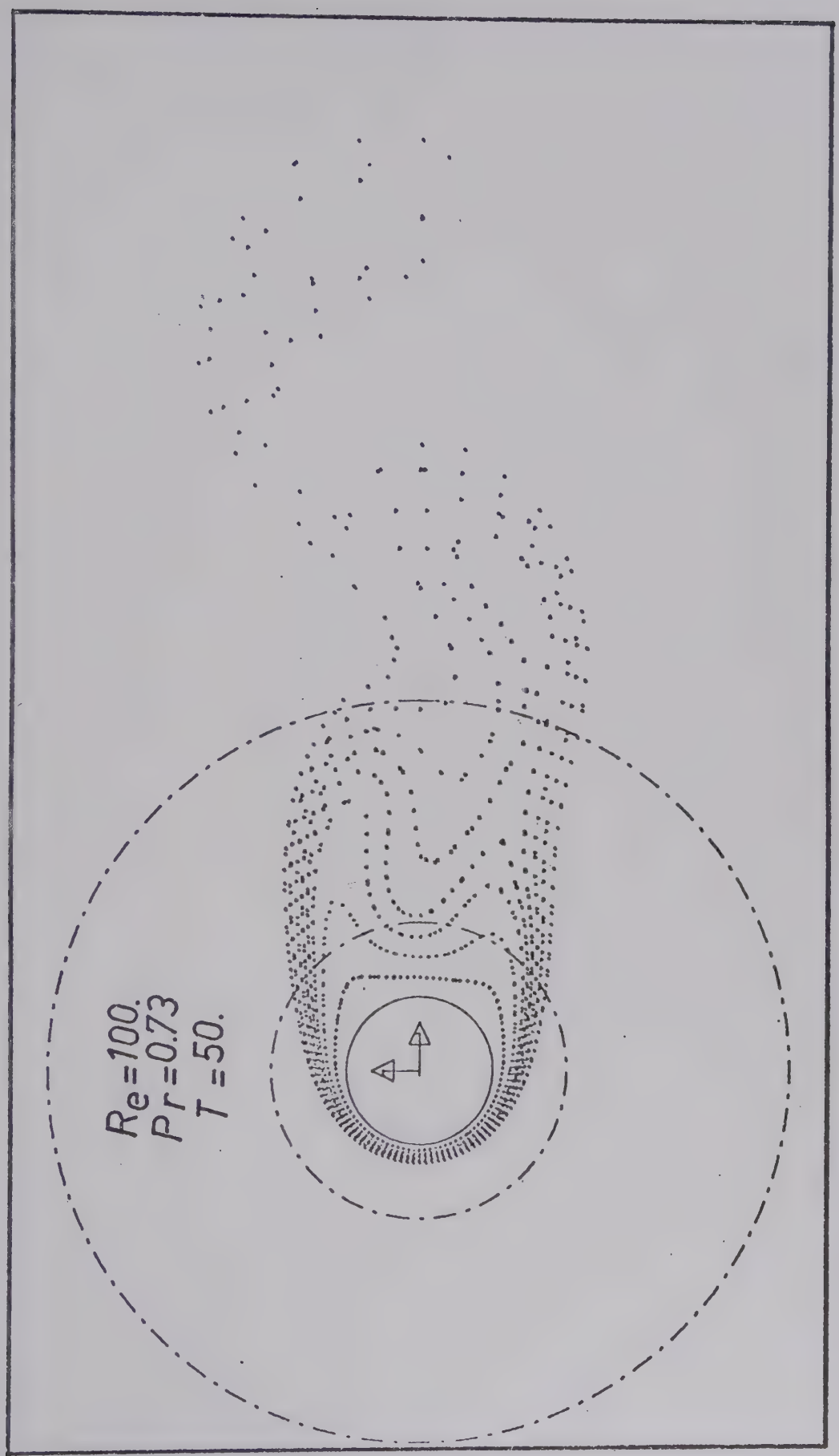


Figure 15b

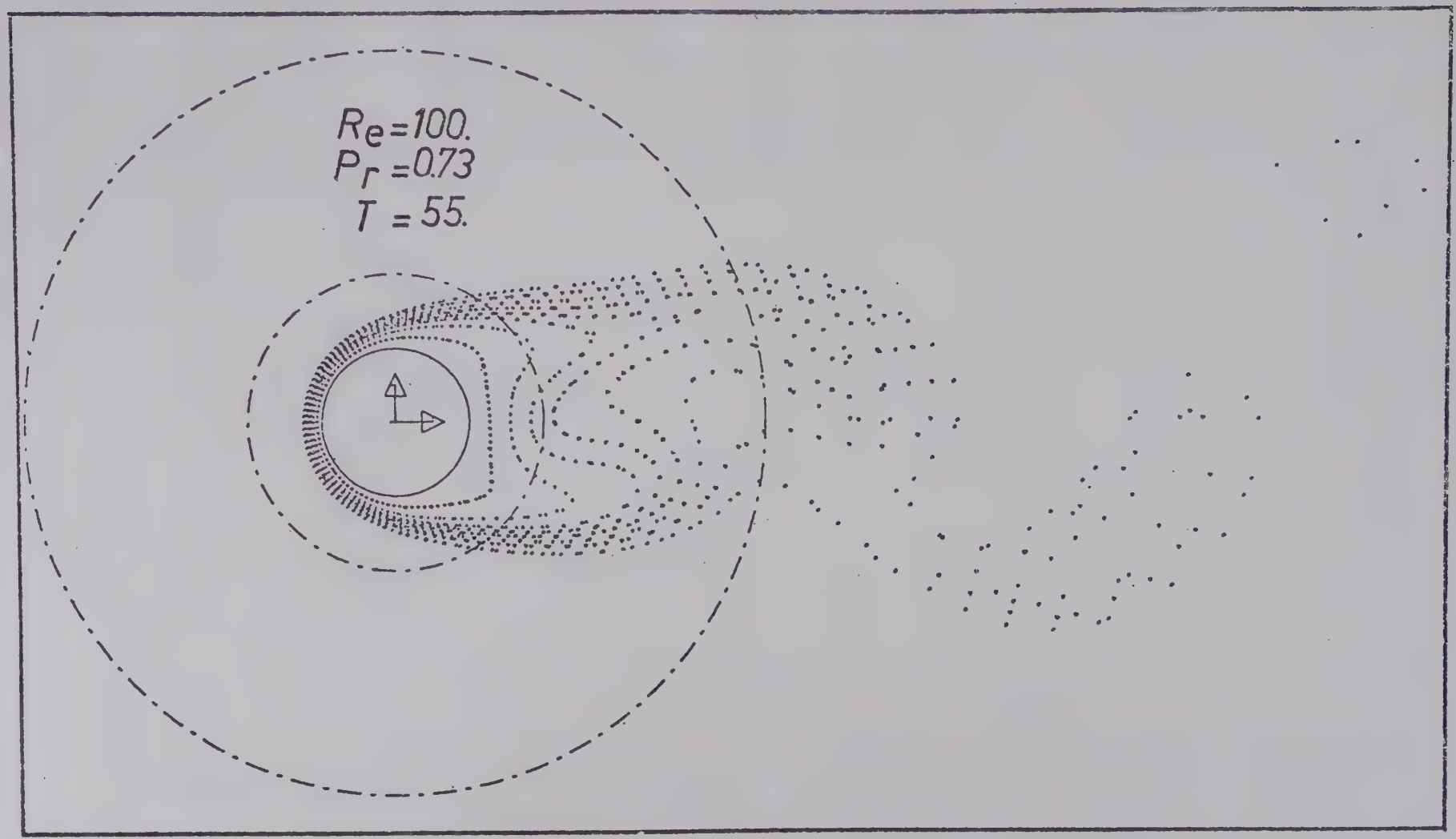


Figure 15c

Figures 15 : Visualisation des lignes isothermes Re = 100, Pr = 0,73

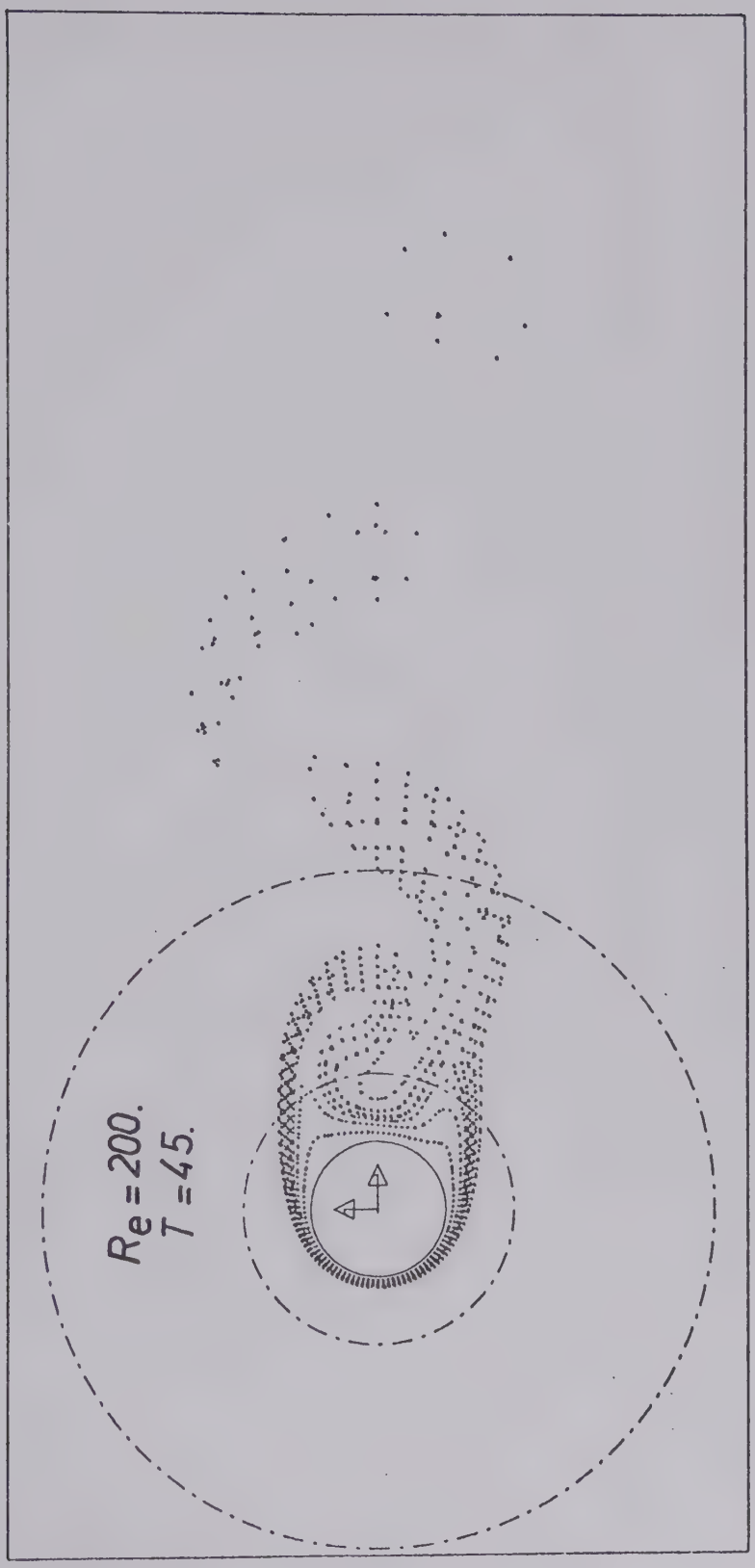


Figure 16a

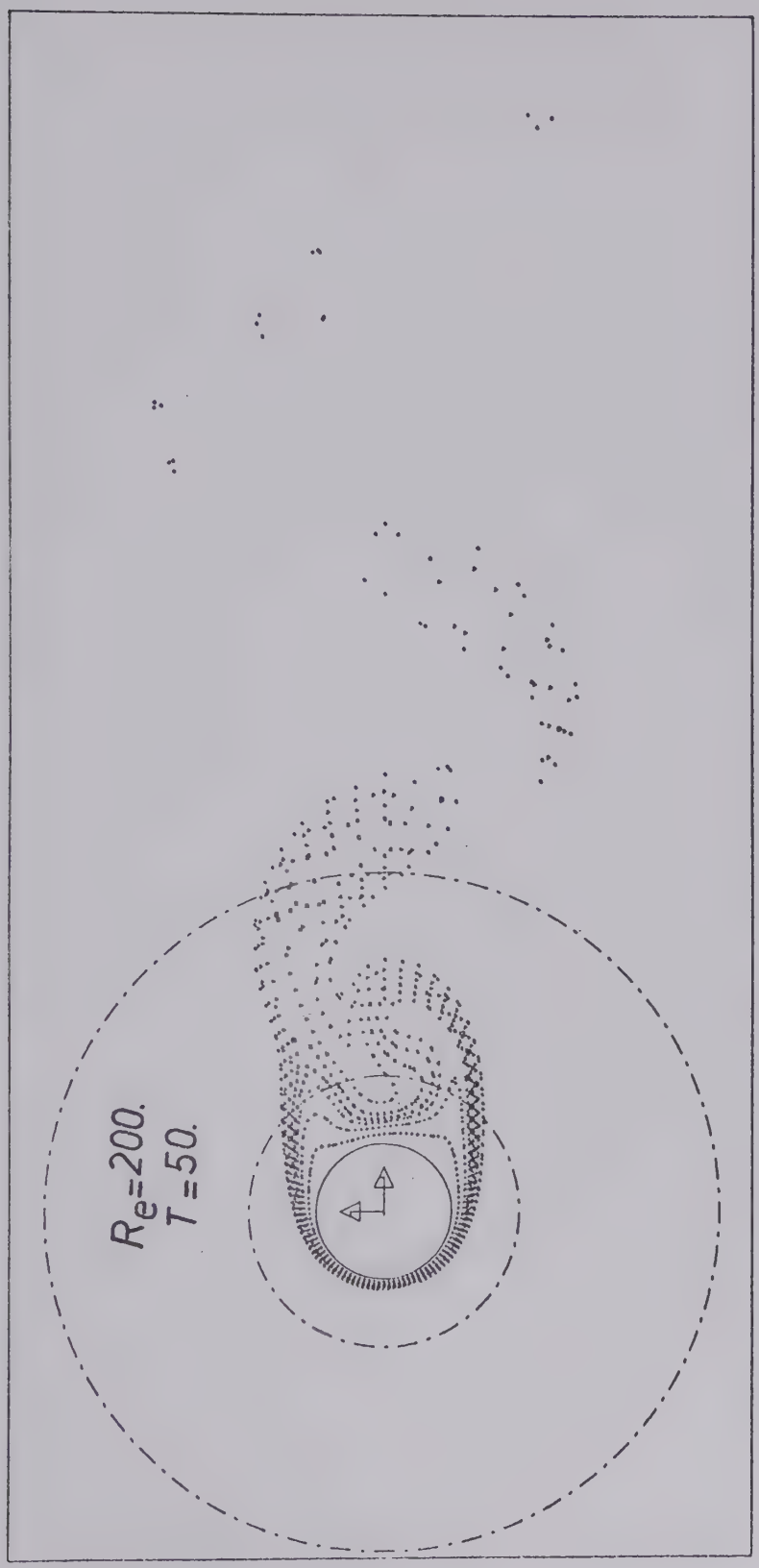


Figure 16b

Figure 16c

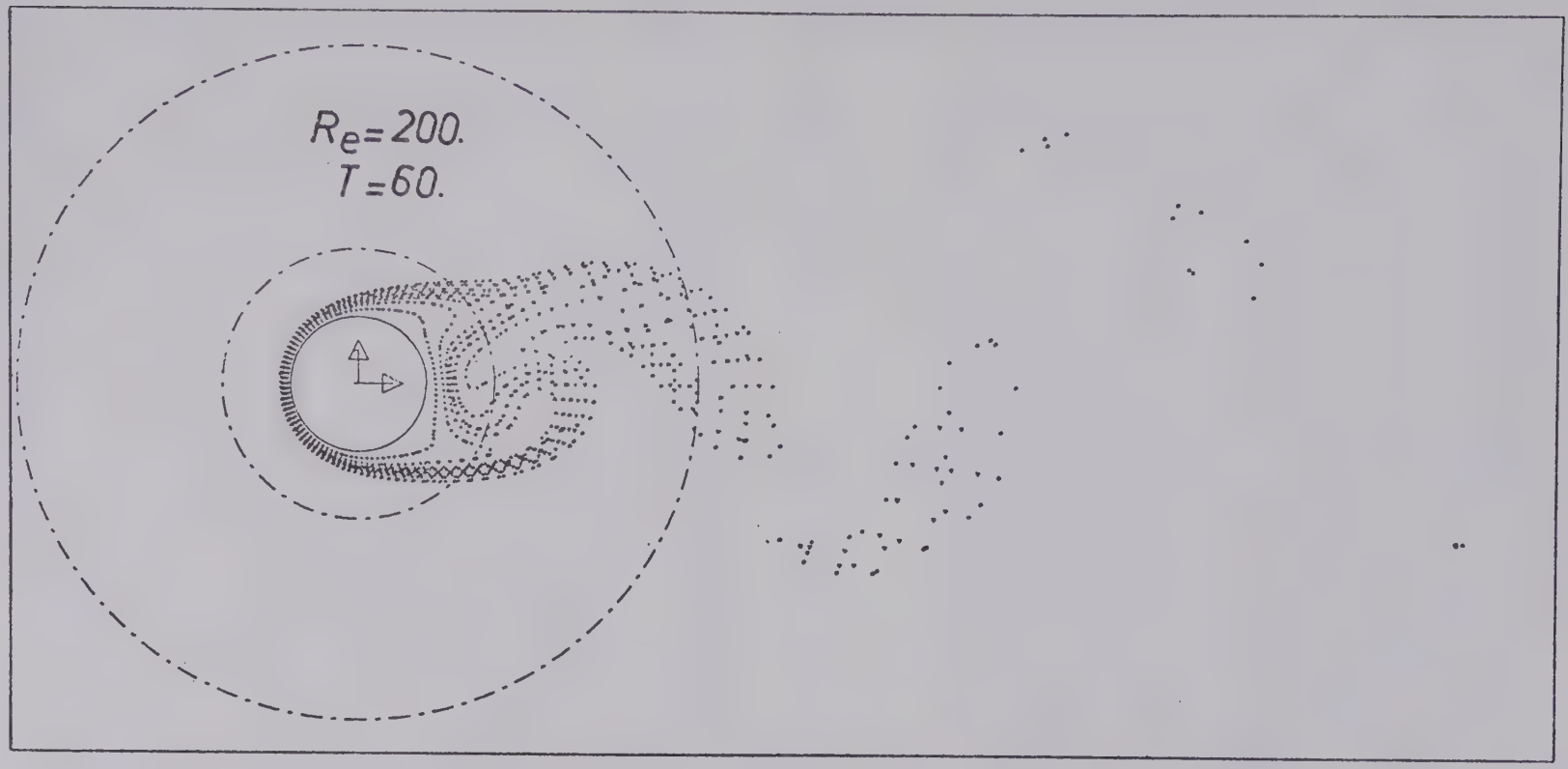


Figure 16d

Figures 16 : Visualisation des lignes isothermes. Re = 200, Pr = 0,73

Valeurs des isothermes : 0,7 ; 0,5 ; 0,4 ; 0,35 ; 0,3 ; 0,25 ; 0,20 ; 0,15

Si la comparaison avec ces résultats révèle une différence sensible, l'ordre de grandeur est cependant le même.

Les lois expérimentales de HILPERT (1933), COLLIS et WILLIAMS (1959) (équations 4 et 5, chapitre II) présentent une discontinuité de pente pour un nombre de Reynolds voisin de 40. Ce phénomène est attribué par COLLIS et WILLIAMS à l'apparition du régime d'allées tourbillonnaires.

Pour conclure, nous dirons, en ne se basant que sur la seule valeur Nu = 5,25 pour Re = 100, qu'elle est très proche de celle prédite par les lois expérimentales (5,23) de MAC ADAMS (1954), CHURCHILL et BERSTEIN (1977) ; ces lois ne présentant pas de discontinuité dans la zone d'apparition des allées tourbillonnaires.

VI. CONCLUSION

L'ensemble des caractéristiques dynamiques et thermiques de l'écoulement avec allée tourbillonnaire est défini par une périodicité d'évolution temporelle ou spatiale.

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes instationnaires simule bien, après injection de perturbations numériques localisées dans l'espace et dans le temps, un écoulement non permanent caractérisé par la fréquence réduite St. L'écoulement simulé après amorçage du processus d'instabilité débouche sur un régime d'équilibre indépendant de la nature et de l'intensité des perturbations.

La valeur du nombre de Reynolds critique Re_c au-dessus duquel le régime non permanent se développe, a été localisée dans l'intervalle $30 < Re_c < 50$. En dessous (Re = 30) le régime symétrique stationnaire subsiste bien que des perturbations soient injectées.

Les principales caractéristiques de l'écoulement ont été déterminées. Nous avons résumé dans le tableau III leurs valeurs moyennes ainsi que l'amplitude des oscillations.

Les visualisations des lignes de courant, lignes isorotationnelles et lignes isothermes facilitent et expliquent en partie le mécanisme séquentiel de production et de détachement des tourbillons qui prend naissance sur la partie aval de l'obstacle. Si ce mécanisme n'influe que sur une bande étroite du sillage thermique, par contre le champ de vitesses est perturbé dans une zone beaucoup plus large.

La bonne concordance des résultats numériques avec les relevés expérimentaux confirme la validité du code de calcul appliqué à un phénomène relativement complexe.

NOMBRE DE REYNOLDS	100.	200.
COEFFICIENT DE TRAINEE C_x	1.30 ± 0.01	1.27 ± 0.035
COEFFICIENT DE PORTANCE C_y	± 0.2	± 0.4
ANGLE DE DECOLLEMENT θ_d	$116.5° \pm 2.25$	$110° \pm 3.$
NOMBRE DE STROUHAL S_t	0.160	0.190
NOMBRE DE NUSSELT $\bar{N}_u$	$5.25 \pm \backsim 0$	8.062 ± 0.05

Tableau III : Principales caractéristiques dynamiques et thermiques de l'écoulement avec allée tourbillonnaire.

CHAPITRE VII

VISUALISATION DU CHAMP THERMIQUE

CHAPITRE VII

VISUALISATION DU CHAMP THERMIQUE

I. INTERET DE L'ETUDE

Dans la plupart des cas, les lois de transfert thermique autour d'un cylindre sont établies expérimentalement en effectuant un bilan d'énergie : puissance électrique fournie - puissance échangée entre le cylindre et le fluide. C'est donc une détermination globale.

Il paraît intéressant de chercher à obtenir, toujours par l'expérience, des renseignements complémentaires d'ordre local afin de mieux cerner la comparaison avec le champ thermique obtenu par le calcul.

II. DESCRIPTION DU MONTAGE EXPERIMENTAL

Un cylindre de 1 cm de diamètre et 15 cm d'envergure est placé transversalement dans une veine rectangulaire (15 x 15 cm^2) d'une soufflerie munie de deux hublots transparents. La mise en vitesse de l'air est obtenue à partir d'une chambre capacitive de grandes dimensions maintenue à une pression constante. Un convergent, ayant un rapport de contraction élevé (16/1) assure une bonne uniformité des profils de vitesse dans la section d'essai (figure 1). Enfin un long diffuseur (5 m) prolonge la veine jusqu'à une enceinte où règne la pression atmosphérique.

Un porte sonde à deux degrés de liberté suivant les deux directions perpendiculaires à la génératrice du cylindre permet l'exploration du champ de l'écoulement. Les vitesses sont déterminées soit à l'aide d'un tube de pitot relié à un micromanomètre (FURNESS) capable de déceler de très faibles pressions (10^{-4} mm d'eau), soit à l'aide d'une

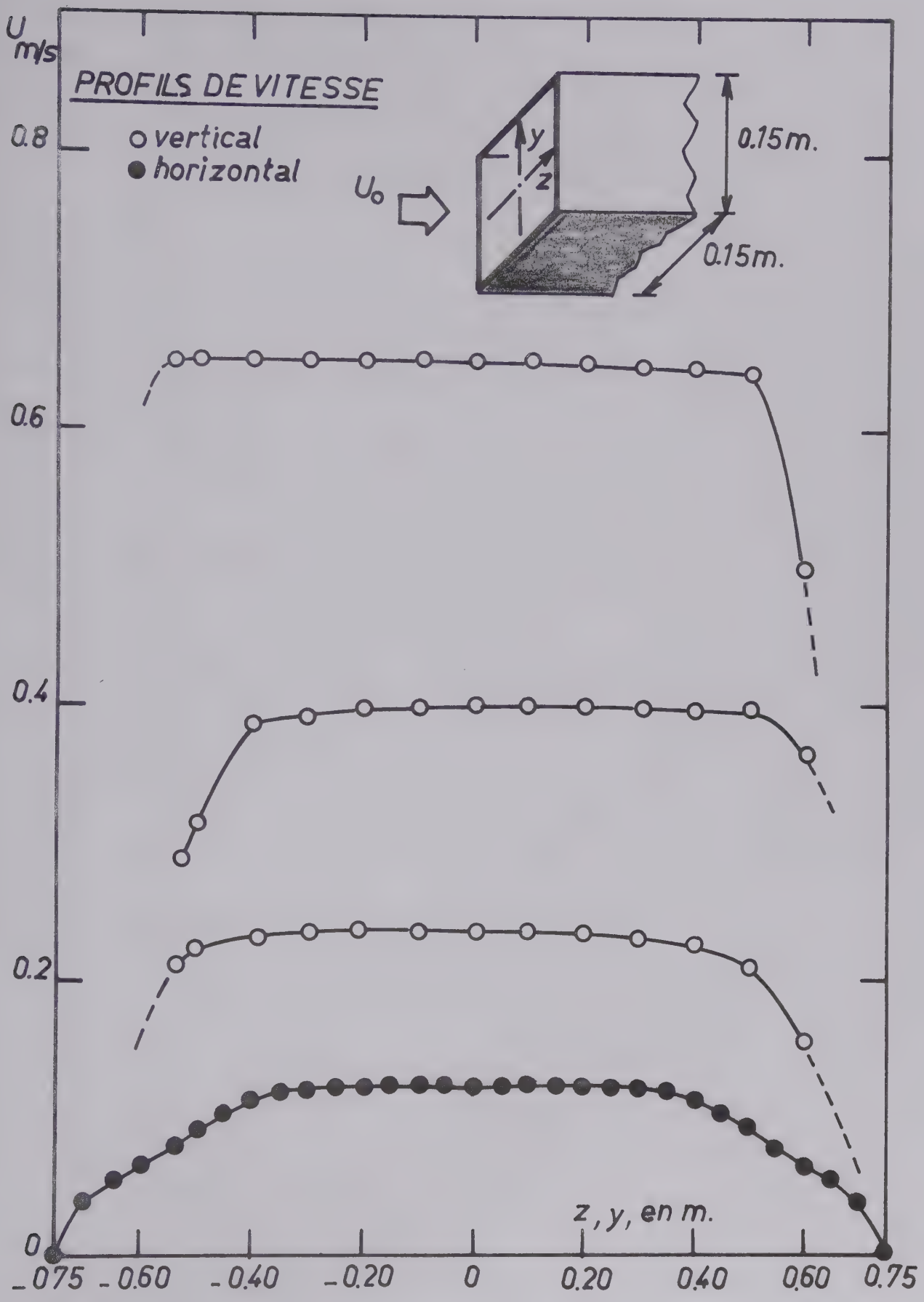
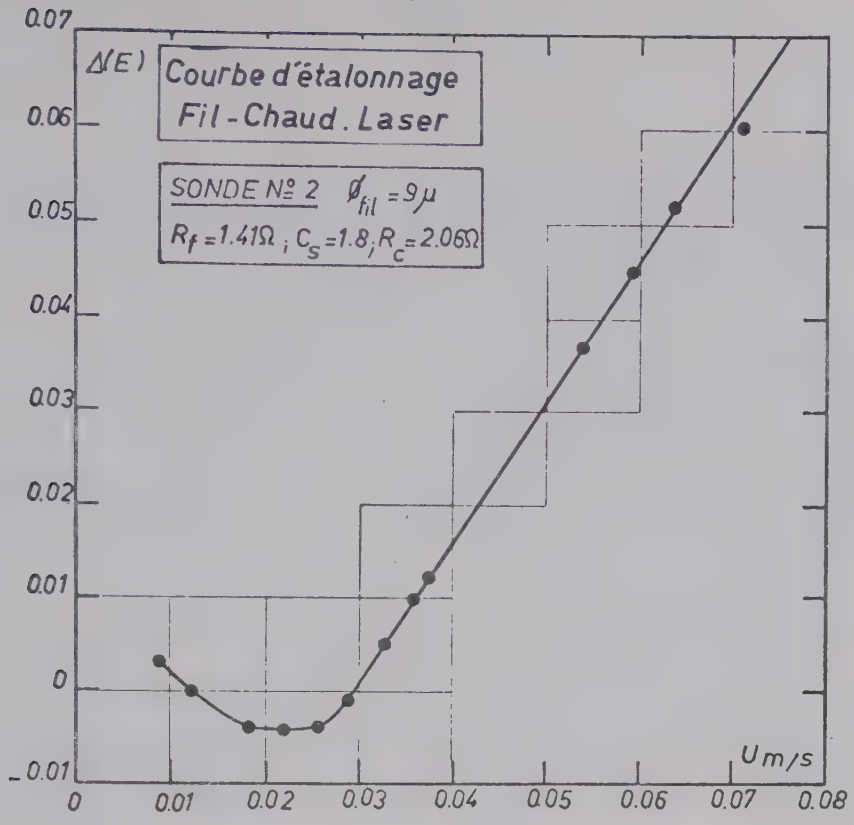


Figure 1 : Profils de vitesse relevés dans la veine d'essai.



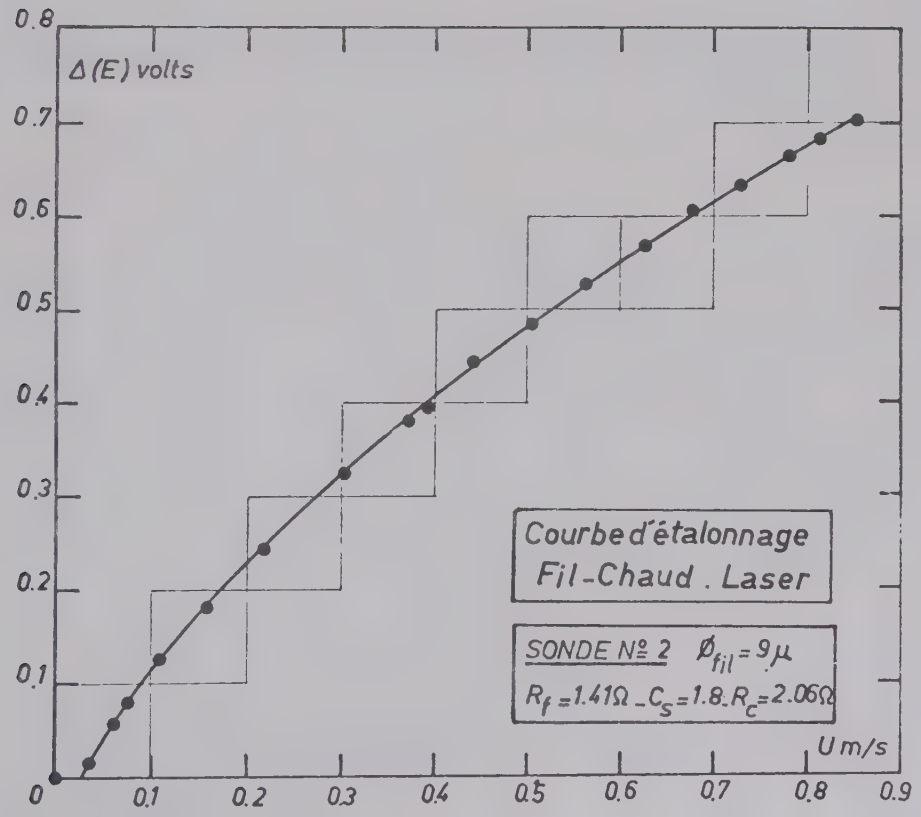


Figure 2 : Courbes d'étalonnage de fil chaud par comparaison avec un laser.

sonde anémométrique à fil chaud étalonnée par comparaison avec un vélocimètre à laser aux faibles vitesses (10cm/s pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 100).

Le cylindre est constitué d'un fourreau de cuivre chauffé intérieurement par une résistance électrique formant un solénoïde à pas variable. Cette disposition minimise les effets de bouts et permet d'obtenir l'uniformité de température sur une grande partie de l'envergure (un écart de $\pm$ 2,5% de la température nominale sur 82% de la longueur).

La visualisation du champ thermique est faite à l'aide d'un interféromètre HUET-ONERA dont nous allons décrire, dans le paragraphe suivant, le principe de fonctionnement. Le traitement des clichés photographiques à partir desquels on détermine le champ de température est présenté au § III.4.

III. PRINCIPE DE L'INTERFEROMETRIE DIFFERENTIELLE

III.1. INTRODUCTION

Les dispositifs interférométriques permettent de déterminer la différence de marche de rayons lumineux cohérents. Cette différence de marche peut résulter soit de parcours géométriques différents (expériences de YOUNG, FRESNEL), soit de chemins optiques différents en raison de différences d'indice du milieu (interférences de Newton). C'est ce dernier effet qui est mis à profit dans les expériences de mécanique des fluides, l'indice de réfraction du fluide étant fonction de l'état thermodynamique du milieu.

Deux dispositifs peuvent être utilisés : l'interférométrie absolue et l'interférométrie différentielle. Le premier dispositif fait interférer un rayon de référence et un rayon perturbé par le milieu à étudier. L'image ainsi obtenue permet l'accès direct aux lignes iso-indices. C'est l'interféromètre de Michelson ou de Mach-Zehnder.

Le deuxième dispositif fait interférer deux rayons cohérents séparés d'une faible distance. La différence de marche de ces rayons résulte de la différence d'indice entre deux points voisins du milieu. C'est l'interféromètre de Françon.

Nous allons décrire après quelques rappels d'optique, le principe de fonctionnement de l'interféromètre différentiel, le seul dont dispose le laboratoire (G. GONTIER, 1957 ; M. PHILBERT, 1958 ; J. DUPUY, 1939)

III.2. RAPPELS D'OPTIQUE

- Théorème de Malus

Les déviations angulaires θ_x et θ_y d'un rayon lumineux à la traversée d'une lame isotrope hétérogène d'épaisseur e parallèle au plan (x,y) sont :

$$\theta_x = \frac{\partial E}{\partial x} \quad ; \quad \theta_y = \frac{\partial E}{\partial y}$$

où $E = (n-1)e$, n indice de réfraction du milieu.

- Formule de Lorentz-Lorenz et de Gladstone-Dale

L'indice de réfraction d'un gaz est lié à la masse volumique ρ par la relation :

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = C\rho \qquad \text{(Lorentz-Lorenz)}$$

Pour l'air $n \simeq 1$, alors la formule de Lorentz-Lorenz peut être simplifiée :

$$\frac{n - 1}{\rho} = k \qquad \text{(Gladstone-Dale)}$$

où $k = \frac{n_N - 1}{\rho_N}$, l'indice N est relatif aux conditions de température et de pression normales ($n_N - 1 = 2{,}93 \times 10^{-4}$).

- Biprisme de Wollaston

Le biprisme de Wollaston est constitué par deux prismes en quartz biréfringent, taillés à un angle α (figure 3). Les deux axes optiques sont liés à deux indices de réfraction (n_o : indice ordinaire, n_e : indice extraordinaire).

Un rayon lumineux (0) polarisé à 45° par rapport aux axes optiques (0,↑) est dédoublé en deux rayons (1),(2) polarisés suivant deux directions perpendiculaires et formant entre eux un angle 2ε tel que :

$$tg(2\varepsilon) = 2(n_e - n_o)\,tg\alpha$$

ou encore :

$$2\varepsilon \simeq 2(n_e - n_o)\,tg\alpha \qquad \text{car} \qquad (n_e - n_o) << 1$$

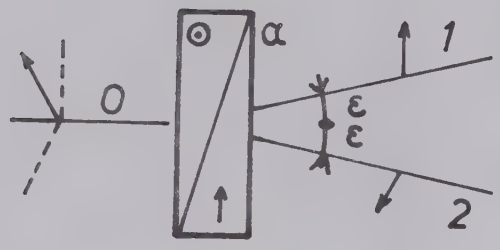


Figure 3 : Principe du biprisme de Wollaston

III.3. INTERFEROMETRE DIFFERENTIEL HUET-ONERA

Le schéma de principe est porté sur la figure 4. L'ensemble est posé sur deux bancs rigides de part et d'autre de la veine d'essai. Les biprismes sont placés aux foyers de deux miroirs sphériques. La veine munie de hublots en verre traité de haute qualité est traversée par le faisceau issu du miroir 1. Le biprisme 1 peut se translater parallèlement à l'axe du montage, quant au biprisme 2 il peut se translater

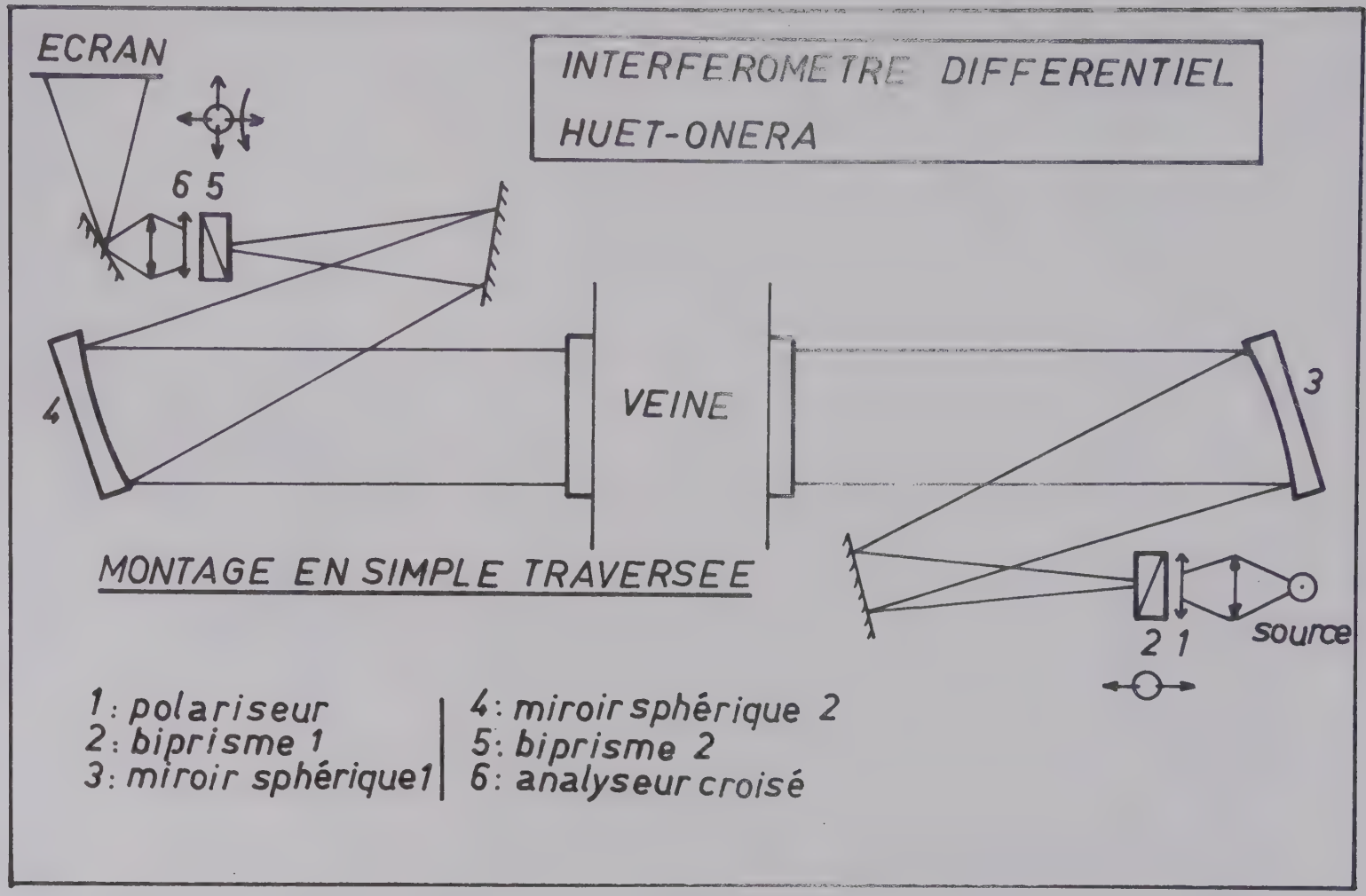


Figure 4 : Schéma d'ensemble de l'interféromètre différentiel.
Montage en simple traversée.

suivant deux directions perpendiculaires et tourner suivant un axe parallèle à l'axe du montage.

Une onde lumineuse polarisée à 45° par rapport aux axes optiques du biprisme 1 est dédoublée en deux ondes lumineuses cohérentes perpendiculaires divergentes d'un angle 2ε. La rotation des biprismes oriente la direction du dédoublement. Ce dédoublement angulaire devient un dédoublement linéaire χ lorsque se produit la réflexion sur les miroirs, ce qui provoque une double image de tout objet placé dans la veine. En absence de variation d'indice dans la veine, l'ensemble optique est autocompensé, c'est-à-dire que lorsque le centre du miroir sphérique 1 coïncide avec le biprisme 1, la différence de marche entre les rayons dédoublés est nulle ; le biprisme 2 et l'analyseur croisé recomposent identiquement la lumière émise. C'est le réglage en teinte plate. Lorsque cette condition n'est pas remplie, une différence de marche existe et un système de franges parallèles à la direction de dédoublement se forme sur l'écran ; franges de Newton en lumière blanche, franges alternativement obscures et brillantes en lumière monochromatique.

- Principe : Soient deux ondes lumineuses homologues, c'est-à-dire issues du dédoublement d'une même onde lumineuse (figure 5) distantes de χ, et soient θ_{x_1}, θ_{x2} les déviations angulaires introduites par les points voisins P_1, P_2 $(\overrightarrow{P_1P_2} // \vec{x})$. Ces déviations engendrent une différence

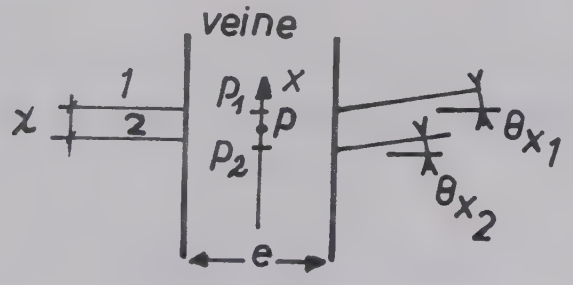


Figure 5

de marche $\Delta\delta$. Lorsque la valeur du dédoublement χ est faible, cette différence de marche est proportionnelle au gradient de l'indice de réfraction au point P milieu et à l'épaisseur e. Le système de franges obtenu après recomposition par le biprisme 2 et l'analyseur, rend compte

du gradient d'indice suivant la direction $\vec{x}$. Les lignes isochromes correspondent à une différence de marche constante, c'est-à-dire les lignes isogradients. L'image ainsi obtenue fournit qualitativement le sens de variation du champ d'indice.

III.4. DEPOUILLEMENTS QUANTITATIFS DES CLICHES PHOTOGRAPHIQUES POUR LES PHENOMENES BIDIMENSIONNELS

Il existe deux traitements suivant que l'on opère en lumière blanche ou en lumière monochromatique. Nous ne décrirons que le dépouillement des clichés obtenus en opérant avec une source de lumière blanche, le seul que nous ayons pratiqué.

Le réglage en teinte plate est le plus commode, car en l'absence de phénomène perturbateur de l'indice de réfraction, la différence de marche dans tout le champ exploré est nulle. Pour procéder à l'étalonnage du dispositif nous effectuons une translation du biprisme 2 parallèlement à la direction du dédoublement qui fait défiler le système de franges et permet d'associer donc une différence de marche associée à chaque teinte. Une table de correspondance, teinte-déplacement, est ainsi établie. Les différences de marche $\Delta\delta$ relatives à chaque couleur sont liées aux déplacements x par la relation algébrique :

$$\Delta\delta = 2\varepsilon.x$$

Nous avons vu que sur le cliché obtenu en présence du phénomène, les lignes isochromes correspondent à des lignes d'égale différence de marche.

Il est alors aisé d'établir une carte de différence de marche $\Delta\delta(x,y)$ du champ d'indice $n(x,y)$ (figure 6).

Une intégration graphique ou une intégration par différences finies conduit à établir la courbe d'indice en un point courant P, le long de toute droite de référence, parallèle à la direction de dédoublement. Cette courbe est déterminée à une constante près. La constante, valeur de l'indice n_o au point P_o devra être déterminée, soit par le calcul, soit par la mesure.

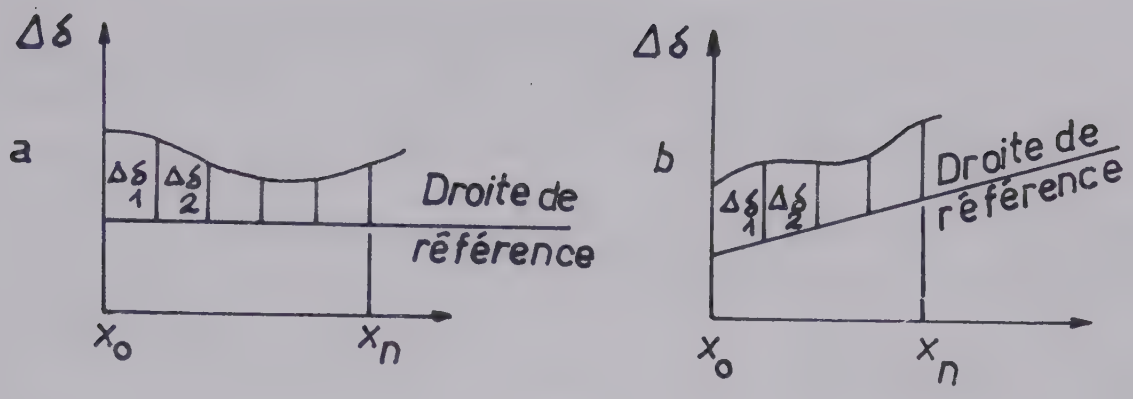


Figure 6 : Courbes de différences de marche, le long de la droite de référence. a) Réglage en teinte plate ; b) réglage en franges, il correspond à un fond à variation linéaire d'indice.

III.5. APPLICATION A L'ETUDE DU TRANSFERT DE CHALEUR DANS UN GAZ EN ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL

- Détermination de la masse volumique ρ

En un point P(x,y) nous avons :

$$\rho \frac{\partial n}{\partial x} = \Delta\delta(x,y) \qquad (1)$$

L'intégration de cette relation le long d'une droite Dy fournit la différence d'indice n(x,y) entre le point P(x,y) et un point de référence $P_o(x_o,y)$ d'indice $n_o(x_o,y)$

$$n(x,y) - n_o(x_o,y) = \frac{1}{e} \int_{x_o}^{x} \Delta\delta(z,y)\,dz$$

soit en utilisant la formule de Glanstone-Dale :

$$\rho(x,y) - \rho_o(x_o,y) = \frac{1}{ke} \int_{x_o}^{x} \Delta\delta(z,y)\,dz.$$

- Détermination de la température

En évolution isobare, la relation d'expansion des gaz permet d'accéder directement à la température :

$$T(x,y) - T_o(x_o,y) = \frac{1}{\beta k e} \int_{x_o}^{x} \Delta\delta(z,y)\,dz$$

où β est le coefficient d'expansion à pression constante.

IV. VISUALISATION DU CHAMP THERMIQUE AUTOUR D'UN CYLINDRE CIRCULAIRE EN CONVECTION FORCEE

IV.1. CONDITIONS D'EXPERIENCE

- Choix des biprismes. Nous disposons de deux jeux de biprismes d'angles respectifs α : 1°, 4°. La sensibilité du montage étant proportionnelle à la déviation 2ε (cf. § III.4.), l'utilisation des biprismes à 4° donne un grand nombre de franges et donc une bonne définition du champ gradient ; aussi bien dans les zones à forte variation (franges serrées) que dans les zones à variation modérée (franges espacées). Cependant, nous avons vu (§ III.3.) que tout obstacle placé dans le champ d'observation produit deux images décalées d'une distance d'autant plus importante que l'angle du biprisme est élevé. (figure 7).

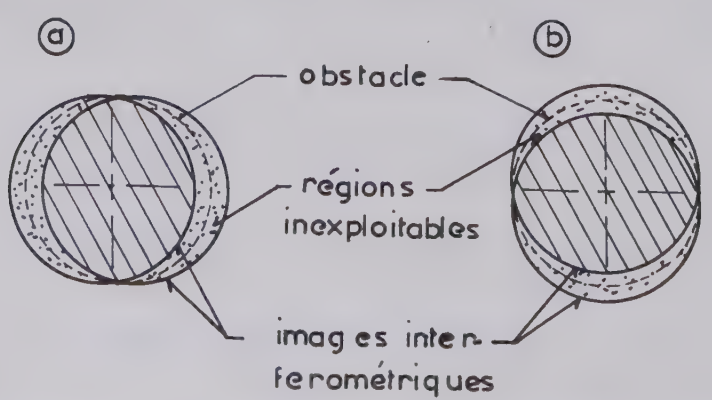


Figure 7 : images interférométriques de l'obstacle
Directions de dédoublement : (a) : x ; (b) : y

Il en résulte une perte d'information au voisinage de l'obstacle. Les visualisations numériques du champ de température (ch. V, VI) montrent que c'est précisément près du cylindre que sont localisées les isothermes significatives.

L'utilisation des biprismes à 4° ne permettrait donc pas de tirer tous les renseignements utiles pour effectuer la comparaison avec les simulations numériques.

Après des essais qui ont confirmé ces désavantages, nous avons opté pour l'utilisation des biprismes de 1°.

Pour chaque essai deux clichés photographiques sont réalisés. Un premier cliché fixe les gradients suivant une direction parallèle à la vitesse U_∞ de l'écoulement. Après une rotation d'un demi-tour de l'axe des biprismes, le deuxième cliché enregistre les gradients suivant une direction perpendiculaire.

Le dépouillement de la première photographie permet de bien déterminer la température à l'amont et à l'aval de l'obstacle car les gradients de température suivant la direction $\vec{x}$ sont importants.

La deuxième photographie permet de calculer la température avec précision à l'extrados ou l'intrados de l'obstacle, régions où la température présente de forts gradients suivant la direction y perpendiculaire au sens de l'écoulement.

= Contrôle des conditions d'expérience . La température du cylindre est relevée par contact à l'aide d'un thermocouple monté sur le porte-sonde. Le thermocouple sert également à effectuer des relevés "ponctuels" dans l'écoulement.

Les simulations numériques ont été effectuées en supposant les propriétés physiques du fluide constantes. La comparaison avec l'expérience implique que celle-ci n'affecte pas sensiblement les propriétés du fluide. Une différence de température de 25°C a été affichée. Cette valeur étant un compromis qui concilie la contrainte ci-dessus et la nécessité d'obtenir suffisamment de franges pour effectuer l'intégration.

La vitesse du fluide est mesurée à l'aide d'une sonde à fil chaud ou d'un tube de Pitot (cf. § III.2.).

IV.2. RESULTATS

Nous avons porté sur la figure 8 le champ thermique, ou plus précisément les lignes isothermes normalisées par rapport à la différence de référence $(T_p - T_\infty)$ pour le régime d'écoulement $Re = 100$. La quasi-symétrie des lignes iso-gradients par rapport à la direction de l'écoulement nous a conduit à ne considérer qu'un demi domaine.

Les points déterminés respectivement à chaque direction de dédoublement (x,y) sont différenciés comme il est indiqué sur la légende.

Dans la région délimitée par les lignes radiales $\theta = 30°$ et 60°, les points relatifs à chaque dépouillement conduisent aux mêmes résultats, ce qui permet de conclure à la consistance de la procédure. Théoriquement, le dépouillement suivant une seule direction conduit à la détermination de la température dans tout le champ (excepté sur la ligne de symétrie x pour une direction de dédoublement y où $\partial T/\partial y \simeq 0$). Dans la pratique, il s'est avéré nécessaire de dépouiller suivant deux directions normales.

La comparaison entre calcul et expérience pour l'isotherme 0.7 qui figure également sur la planche 8 fait apparaître une bonne concordance jusqu'à l'angle $\theta = 90°$. Elle s'avère moins bonne ailleurs. Nous allons tenter d'en donner les raisons. Celles-ci sont dues, nous semble-t-il, à la disparité entre le modèle expérimental et le modèle numérique, et aux limitations de l'interférométrie différentielle.

IV.2.1. Disparités entre le modèle expérimental et le modèle numérique.

La simulation numérique est effectuée sur un écoulement bidimensionnel. Or le modèle expérimental est réalisé avec un cylindre d'allongement fini ($d/\ell = 0{,}066$). La non uniformité du profil de vitesse expérimental (figure 1) exclut toute bidimensionnalité rigoureuse.

Or la détermination expérimentale de la température repose sur l'hypothèse de bidimensionnalité du régime de convection forcée, hypothèse non vérifiée près des hublots, en particulier à l'aval de l'obstacle, là où les vitesses sont très faibles. Pour rendre compte de la non uniformité le long d'une droite parallèle à la génératrice du cylindre, la relation (1) (cf. § III.4.) doit être remplacée par l'expression :

$$\int_{o}^{e} \frac{\partial n}{\partial x}\, dz = \Delta\delta(x,y) \qquad (2)$$

qui peut être présentée, pour isoler les effets de paroi localisés sur une distance η des hublots, par :

$$\int_{\eta}^{e-n} \frac{\partial n}{\partial x}\, dz + 2\int_{o}^{\eta} \frac{\partial n}{\partial x}\, dz = \Delta_{e-2\eta}\delta(x,y) + 2\Delta_{\eta}\delta(x,y)$$

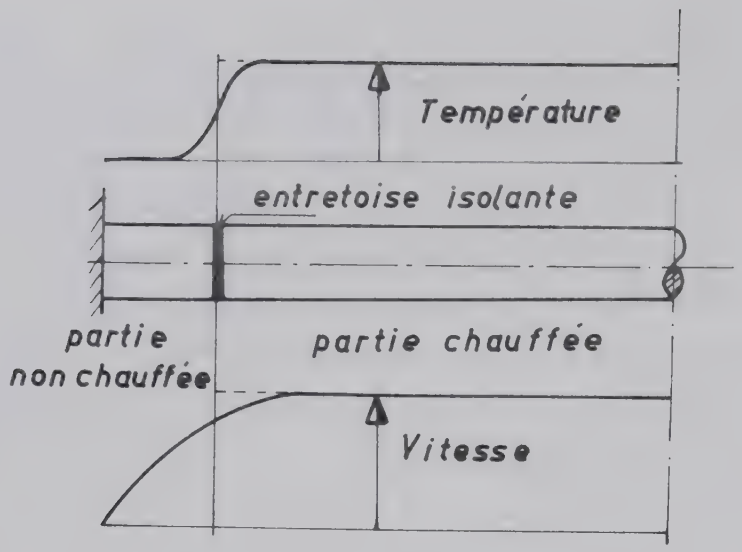
ou encore :

$$(e-\eta)\cdot\frac{\partial n}{\partial x} + 2\int_{o}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}\, z = \Delta_{e-2\eta}\delta(x,y) + 2\Delta_{\eta}\delta(x,y)$$

Pour chiffrer la quantité $2\Delta_{\eta}\delta(x,y)$ qui mesure en quelque sorte le défaut de bidimensionnalité, il est nécessaire de connaître le champ d'indice. Or, c'est précisément le but de l'expérience.

Pour conclure cette partie, nous dirons que l'emploi inévitable de la relation (1) conduit à une erreur propre au montage expérimental. Il est impossible de chiffrer cette erreur dont on peut simplement dire qu'elle est d'autant plus importante que l'on s'écarte de la configuration bidimensionnelle.

Remarque : Pour supprimer cet inconvénient, on pourrait réaliser un cylindre chauffant constitué par une zone centrale chauffée, limitée par deux zones non chauffées de part et d'autre, et dont l'étendue est déterminée par la cassure du profil de vitesse au voisinage de la paroi comme il est schématisé sur la figure ci-après :



Cylindre chauffant avec échelon de température.

IV.2.2. Limites de l'interférométrie interférentielle

Il s'est avéré impossible de déterminer la température dans la région proche de la ligne radiale 140°, cette région étant très mal pourvue en lignes isochromes près du cylindre.

Pour tenter de surmonter cet inconvénient nous avons calculé et tracé les lignes isogradients de la simulation numérique (figures 9, 10). Cette visualisation numérique est doublement instructive.

* Qualitativement, les lignes isogradients numériques et expérimentales présentent une analogie frappante, particulièrement sur la partie avant du cylindre, ce qui valide les résultats du code de calcul.

* Elles révèlent les formes tortueuses et très enchevêtrées des lignes isogradients dans la région de culot. Il est impossible de discerner de façon sûre les contours de ces lignes sur les diapositives, car :

- les couleurs ne sont pas rendues fidèlement par la photographie,

- la zone de dédoublement de l'image de l'obstacle empiète sur cette région, au voisinage de la paroi. Les formes tortueuses des lignes relevées par la simulation numérique (figures 9, 10) interdisent toute extrapolation à la paroi.

Plusieurs sensibilités de film couleur (KODAK-EKTACHROME) ont été testées. La source de lumière du banc HUET-ONERA est constituée d'une lame à vapeur de mercure sous pression. Elle possède un spectre de fréquences dont les raies principales correspondent aux couleurs violette, bleu, vert et jaune. La température de couleur de cette source est intermédiaire entre la température de couleur des sources artificielles classiques (film lumière artificielle) et la température de couleur lumière du jour. Seuls les films lumière du jour, 400 ASA, traités en 800 ASA avec un temps de pose long de 1/2 seconde (en raison de la faible luminosité) ont donné des résultats exploitables. Cependant, les couleurs ne sont pas entièrement rendues, certaines comme le marron rosé sont absentes des clichés, alors qu'elles sont présentes sur l'écran de visualisation (figure 11).

Ajoutons pour terminer que l'influence de la convection naturelle pour $Re \leqslant 60$, a rendu impossible la comparaison des résultats expérimentaux avec ceux de la simulation numérique.

V. CONCLUSION

L'interférométrie différentielle permet d'obtenir des renseignements d'ordre local sur un champ thermique en convection forcée. Les informations obtenues sont en bon accord avec les résultats tirés de la simulation numérique sur la partie frontale et l'intrados de l'obstacle.

Cette technique expérimentale, appliquée à la configuration géométrique du cylindre, se heurte à des difficultés qui en limitent l'efficacité théorique.

La simulation numérique dont la validité (pour $Re = 100$) est globalement confirmée par l'excellente comparaison du nombre de Nusselt

moyen avec les lois expérimentales (chap. VI) permet de tirer des renseignements non accessibles par cette expérience, en particulier la mise en évidence de la structure du sillage thermique dans le régime avec allées tourbillonnaires (chap. VI).

Si l'on devait poursuivre de telles expériences, il conviendrait d'envisager une orientation vers l'utilisation de l'interférométrie absolue (§ III.1). Bien que cette technique soit d'une mise en oeuvre plus délicate (GONTIER) elle présente plusieurs avantages sur l'interférométrie différentielle puisqu'elle assurer en particulier :

- la détermination directe des lignes isothermes et par conséquent la possibilité de calculer le nombre de Nusselt local (ECKERT et al, 1952)
- l'absence de dédoublement de l'image de l'obstacle.

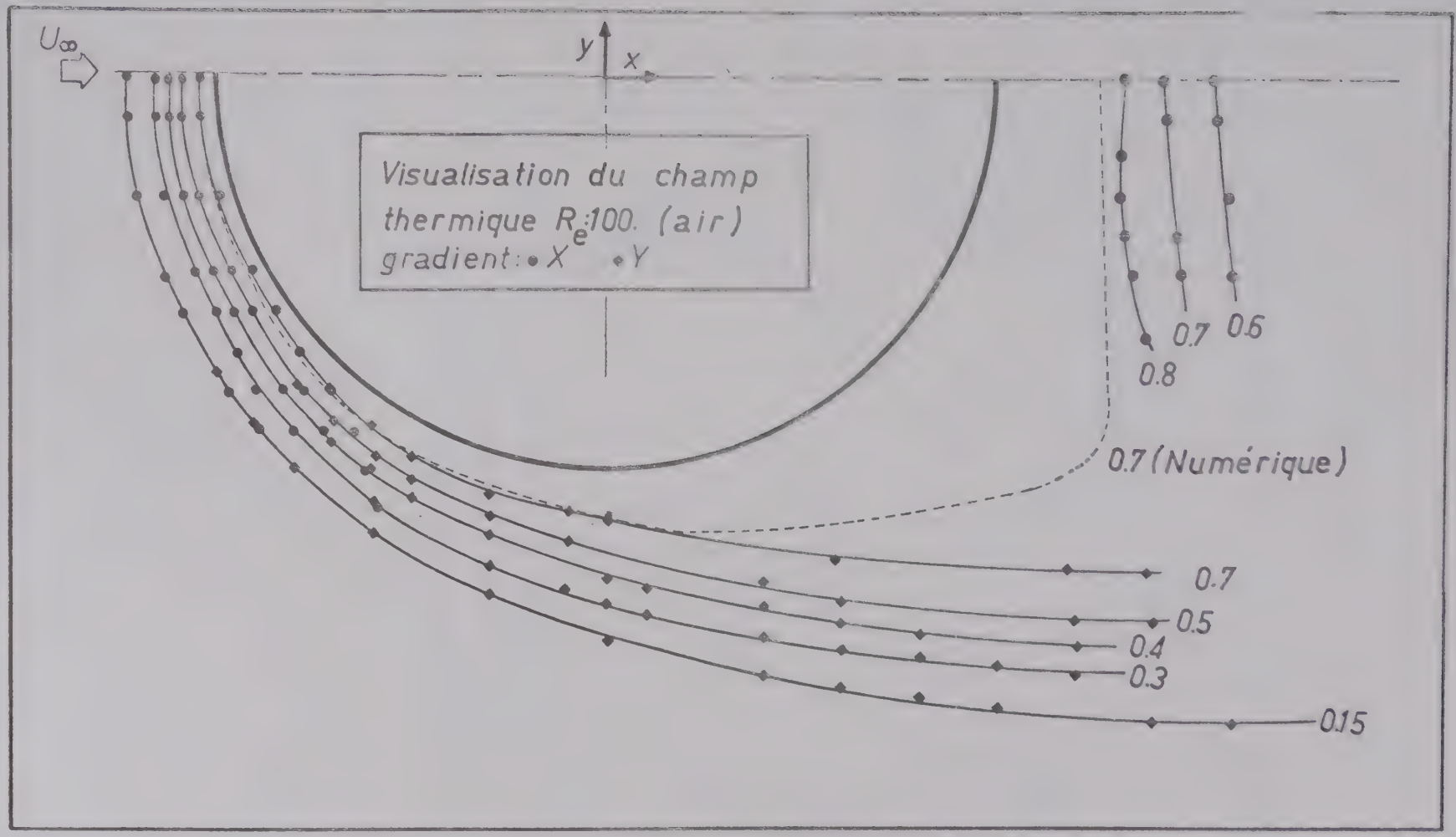


Figure 8 : Résultat expérimental. Lignes isothermes obtenues par interférométrie différentielle Comparaison avec la simulation numérique (--). Les valeurs portées sur les lignes isothermes sont normalisées par rapport à la différence de température ($T_p - T_\infty$)

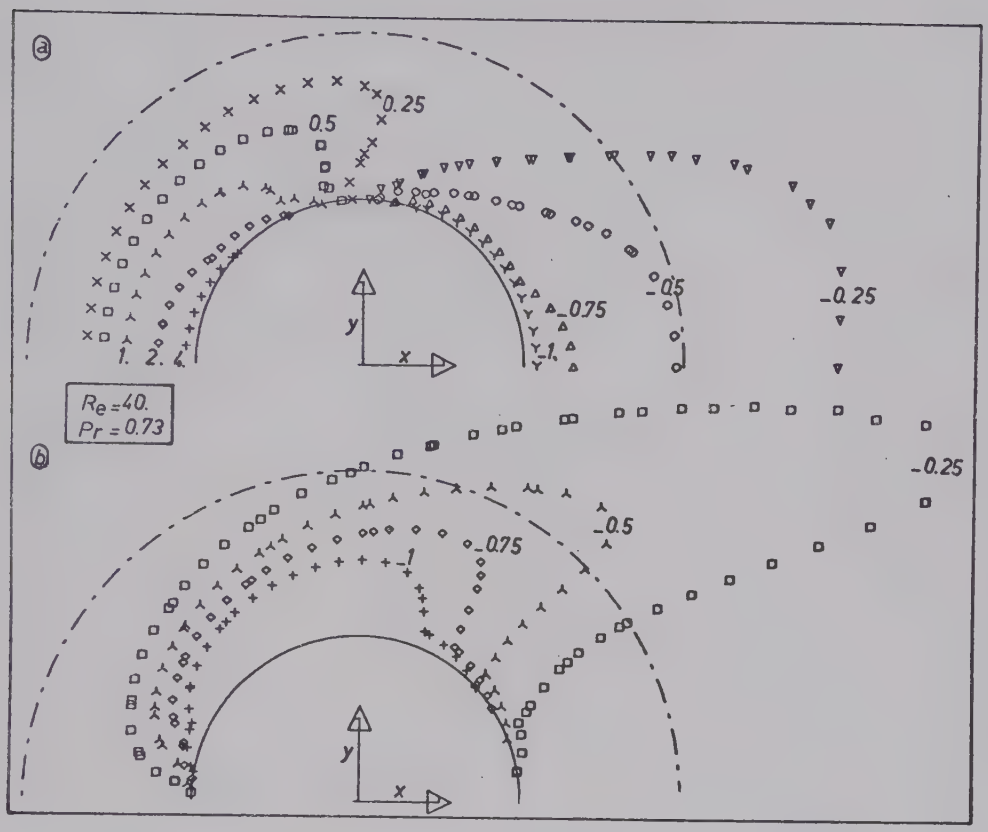


Figure 9 : Courbes isogradients de la température.
Simulation numérique (a) direction $\vec{x}$
Ecoulement symétrique (b) direction $\vec{y}$

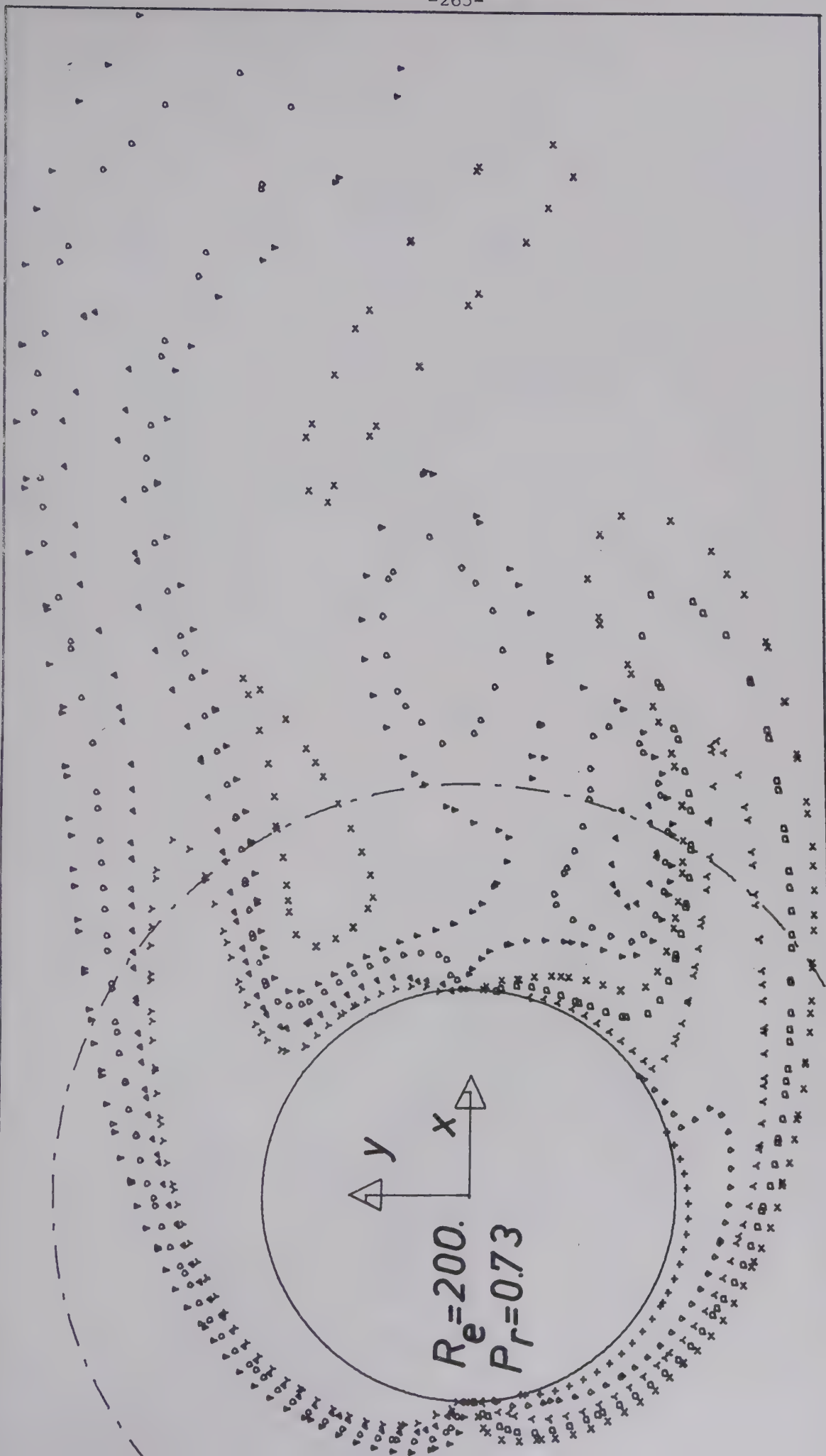


Figure 10 a

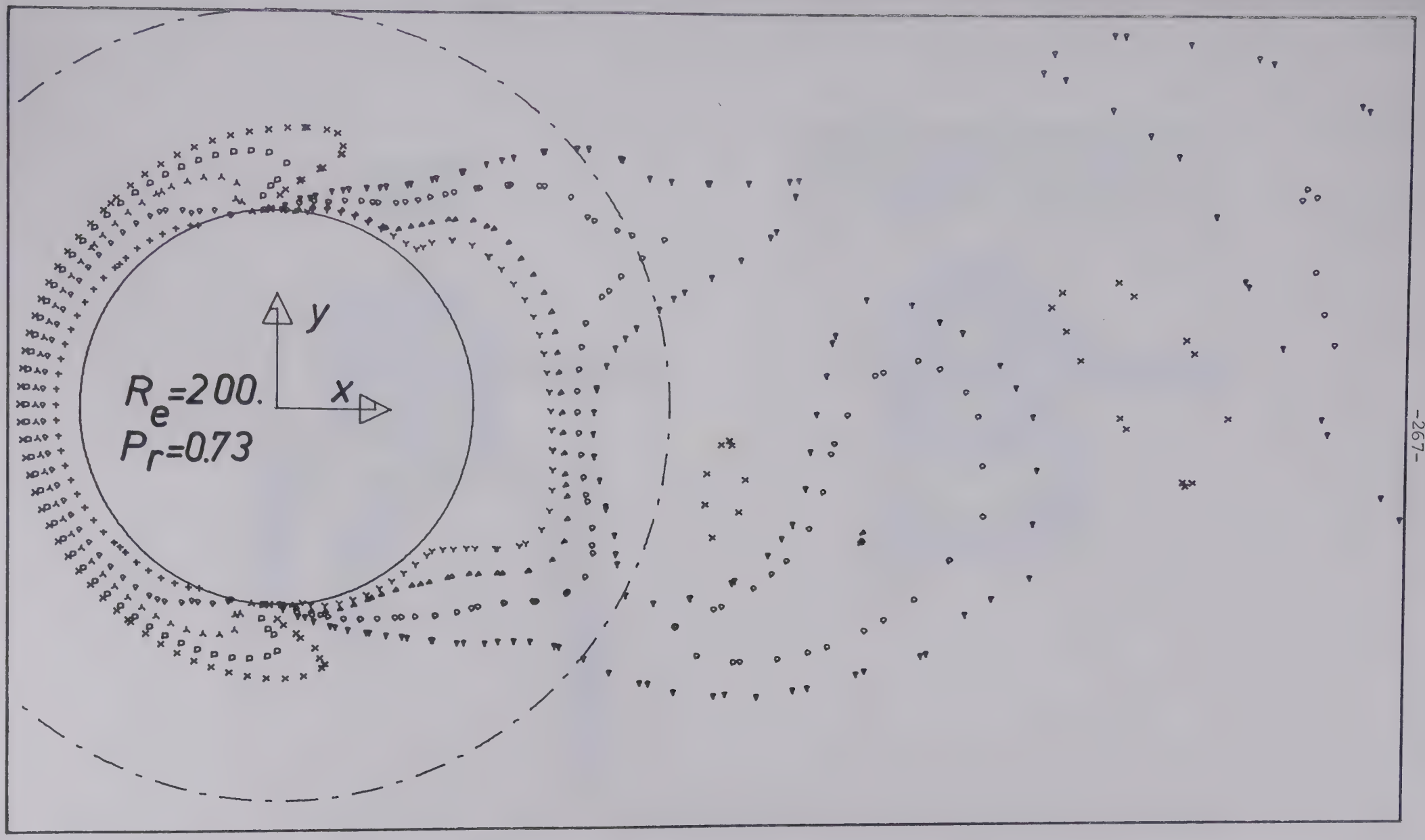


Figure 10 : Lignes isogradients obtenues numériquement pour le régime d'allée tourbillonnaire avec convection forcée. a) Gradients y, b) gradients x[+:3 ; ∇:+2 ; λ:+1 ; :+0,5 ; x:0,1 ; γ:-3 ; Δ:-2 ; :-1 ; :-0,5

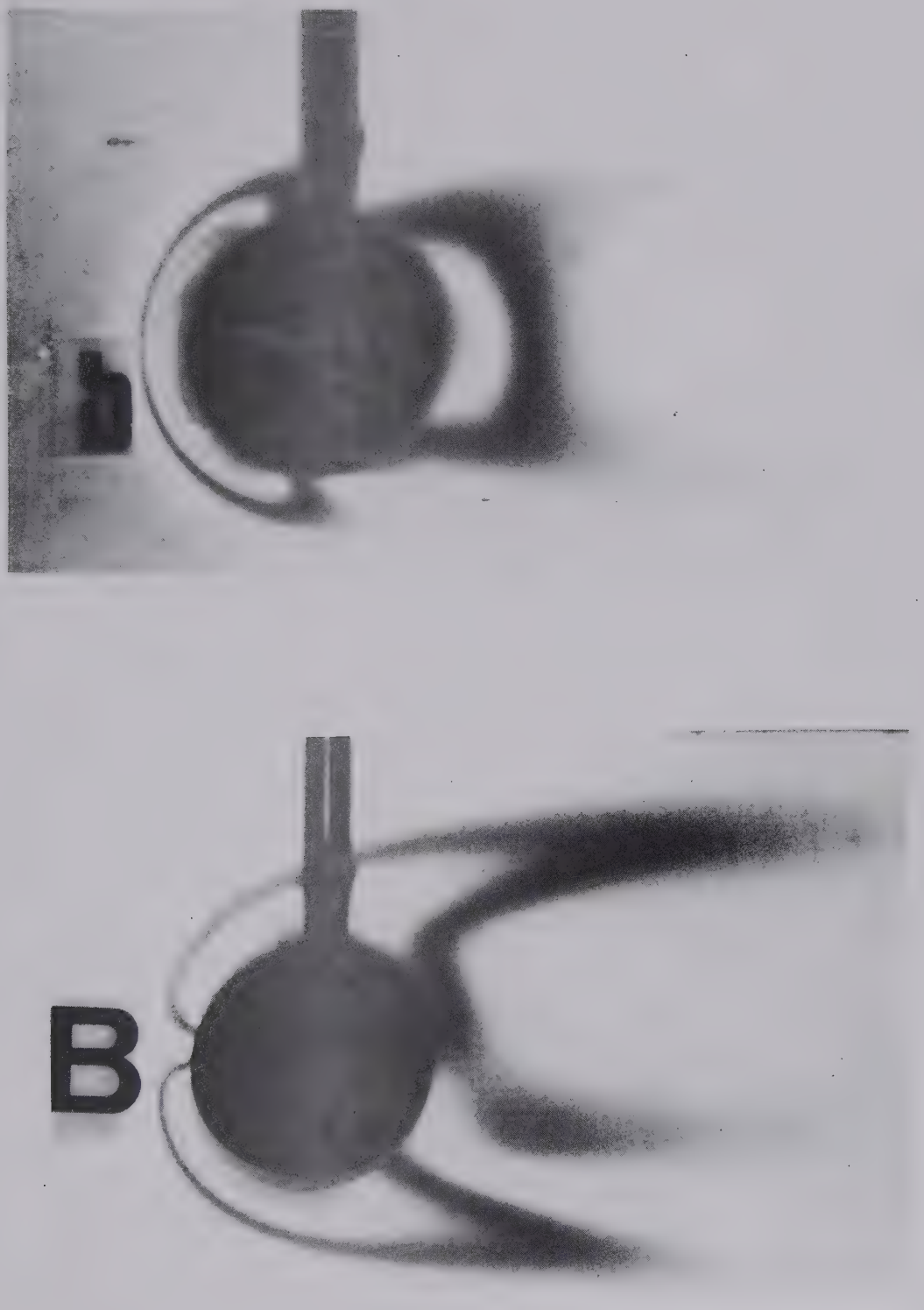


Figure 11 : Visualisation du champ thermique $R_e = 100$
b : Gradients x B : Gradients y

CONCLUSIONS GENERALES

CONCLUSIONS GENERALES

L'objet de cette étude sur l'écoulement laminaire autour d'un cylindre à nombres de Reynolds modérés était en fait double. D'une part d'élaborer et de valider un code de calcul permettant de résoudre les équations dynamiques et thermiques du problèmes. D'autre part, d'analyser par voie numérique et expérimentale des propriétés physiques de l'écoulement. En raison de la gamme du nombre de Reynolds traité (5 - 200), nous distinguerons, pour cette conclusion, le cas symétrique et le cas d'allée tourbillonnaire.

Le but de l'étude n'était pas de concevoir des schémas numériques nouveaux, mais d'adapter des techniques numériques récentes à un problème physique régi par un système complexe d'équations aux dérivées partielles instationnaires et non linéaires. Nous nous sommes efforcés de préciser les performances et les limites de l'algorithme de calcul relatives à la précision et au temps de calcul. La résolution des équations de Navier-Stokes avec les fonctions courant et rotationnel comprend une équation de transport (équation du rotationnel) et une équation de Poisson (équation de continuité). La détermination de l'équation de la température s'obtient également par la résolution d'une équation de transport. La procédure A.D.I. a été retenue pour résoudre les équations de transport. Cette technique assure une grande stabilité temporelle et une précision spatiale à l'ordre $o(h^2)$ par l'emploi de schémas centrés. Pour résoudre l'équation de continuité, deux procédures originales ont été utilisées : la procédure A.D.I. optimisée et la procédure F.F.T. mixte. Des tests numériques, effectués sur une équation de Poisson dont la solution est connue, ont conduit à préciser les performances en précision et en temps de calcul relatives à ces deux codes. Une attention particulière a été portée pour le traitement des conditions aux limites. Les trois algorithmes de calcul utilisés conduisent à des systèmes linéaires tridiagonaux qui sont résolus par factorisation.

La simulation de l'écoulement symétrique avec transfert de chaleur montre le bon accord de nos résultats avec les nombreux travaux expérimentaux et numériques récents concernés. Deux points nouveaux sont à mettre à l'actif de cette étude :

- La connaissance du champ de température fournit des informations locales sur le transfert thermique. L'estimation du bilan global du transfert thermique est en parfait accord avec les lois expérimentales.
- La détermination du régime d'écoulement symétrique stationnaire pour $Re = 100$ avec un traitement instationnaire des équations.

Le régime établi d'allées tourbillonnaires, déclenché par l'injection de perturbations numériques, n'est pas lié à la nature des perturbations, ce qui prouve que l'instabilité contenue dans les équations de Navier-Stokes conduit à un régime unique périodique. La bonne estimation de l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds critique, au-dessus duquel les instabilités ont lieu, ainsi que la fréquence de Strouhal qui caractérise le régime périodique, permettent de conclure que le code de calcul élaboré n'introduit qu'une très faible viscosité numérique.

L'analyse des mécanismes séquentiels de production et de transport de tourbillons a été réalisée à l'aide de paramètres ponctuels (angle de décollement, rotationnel à la paroi, évolution de la vitesse en des points tests,...) et des visualisations numériques des lignes de courant et des lignes isorotationnelles. Toutes les grandeurs, thermiques et dynamiques sont étroitement liées au mécanisme séquentiel de production-convection des tourbillons qui prennent naissance à l'arrière du cylindre. La mise en évidence de la complexité du champ de vitesse à l'aval immédiat de l'obstacle montre combien il est difficile d'interpréter les signaux anémométriques fournis par les sondes à fil chaud. Si le transfert thermique global n'est que peu affecté pour $Re = 100$ par l'allée tourbillonnaire, il n'en va pas de même pour le régime $Re = 200$, comme le témoigne l'amplitude des oscillations périodiques du nombre de Nusselt local et moyen.

La bonne concordance entre les résultats de cette étude et les données expérimentales, ainsi que le temps de calcul économiquement acceptable, permettent d'envisager la possibilité d'étendre le code de calcul à l'écoulement turbulent. L'extension de l'algorithme à l'écoulement turbulent implique une modification du maillage dans la zone de sillage afin d'avoir une meilleure définition spatiale ainsi qu'une modélisation particulière de la turbulence. La première condition est envisageable à l'aide de transformations numériques. La deuxième condition implique l'élaboration de modèles qui prennent en compte l'existence d'une organisation préférentielle dans un écoulement turbulent.

ANNEXES

ANNEXE I

RÉSOLUTION DE SYSTEMES TRIDIAGONAUX PAR FACTORISATION DE MATRICES

Il est très courant d'avoir à déterminer la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\alpha x'' + \beta x' + \gamma x + k = 0 \qquad (I.1)$$

$$x \in [0,X]$$

$$x(0) = X_o \quad ; \quad x(X) = X_N$$

La résolution par un schéma aux différences finies centrées, conduit à résoudre le système linéaire :

$$- a_i x_{i-1} + b_i x_i - c_i x_{i+1} = k_i \qquad i = 1,2,\ldots N-1$$

$$b_1 x_1 - c_1 x_2 = k_1 + a_1 X_o$$

$$- a_{N-1} x_{N-2} + b_{N-1} x_{N-1} = k_{N-1} + c_{N-1} X_N$$

avec :

$$a_i = \alpha_i/h^2 - \beta_i/2h$$
$$b_i = 2\alpha_i/h^2 - \gamma_i$$
$$c_i = \alpha_i/h^2 + \beta_i/2h$$
$$h = X/N$$

ou encore, en écriture matricielle :

$$\begin{bmatrix} b_1 & -c_1 & & & \\ -a_2 & b_2 & -c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -a_i & b_i & -c_i & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -a_{N-1} & b_{N-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+a_1X_o \\ k_2 \\ \vdots \\ k_i \\ \vdots \\ k_{N-1}+C_{N-1}x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ K_i \\ \vdots \\ K_{N-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(I.2)}$$

$$A \qquad \vec{x} \qquad \vec{K}$$

THEOREME : *Une matrice régulière peut être décomposée en un produit de deux matrices triangulaires. Si les coefficients diagonaux d'une de ces deux matrices sont égaux à l'unité, alors la décomposition est unique.*

L'application de ce théorème à la matrice tridiagonale A, conduit à deux matrices bibandes centrées.

Il vient :

$$A = T_I \cdot T_S$$

avec :

T_I : matrice triangulaire inférieure,

T_S : matrice triangulaire supérieure, coefficients diagonaux égaux à 1.

En multipliant à gauche la relation (I.2) par T_I^{-1}, on obtient :

$$T_S.\vec{x} = T_I^{-1}\,\vec{k} = \vec{\ell}$$

soit en explicitant :

$$\begin{bmatrix} 1 & -h_1 & & & \\ & 1 & -h_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -h_i \\ & & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_i \\ \vdots \\ \ell_{N-1} \end{bmatrix}$$

avec :

$$h_i = c_i/q_m \qquad \ell_i = (K_i + a_i.\ell_{i-1})/q_i \qquad q_i = b_i - a_i h_{i-1}$$

$$h_1 = c_1/b_1 \qquad \ell_1 = K_1/b_1 \qquad i = 2,\ldots,N-2$$

Ainsi la solution recherchée x_i est déterminée aisément par la relation de récurrence :

$$x_{N-1} = \ell_{N-1}$$

$$x_j = \ell_j + k_j.x_{j+1} \qquad j = N-2,\ldots 1$$

Le nombre d'opérations requises 8.(N-1) croît linéairement avec l'ordre du système.

Cette technique d'inversion directe est connue sous le nom d'inversion de CHOLESKY.

ANNEXE II

DÉTERMINATION DES EFFORTS SUR LE CYLINDRE

I. CALCUL DE LA PRESSION A LA PAROI

L'équation (chap. I, 14) pour $\phi = u_\theta$, se simplifie pour $r = r_o$:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial \theta'}\right|_{r=r_o} = r_o \, \mu \left.\frac{\partial \omega}{\partial r}\right|_{r=r_o}$$

En utilisant les variables adimensionnelles dans le plan transformé (θ, Z) définies au chapitre I, il vient :

$$\left.\frac{\partial P}{\partial \theta}\right|_{Z=0} = \frac{4}{Re} \left.\frac{\partial \omega}{\partial Z}\right|_{Z=0}$$

Si l'on cale la pression à la valeur unité au point d'arrêt amont, nous aurons :

$$\frac{P(\theta)}{p} = 1 + \frac{4}{Re} \int_0^\theta \left.\frac{\partial \omega}{\partial Z}\right|_{Z=0} \cdot \, d\alpha$$

La dérivée du rotationnel $\left.\frac{\partial \omega}{\partial Z}\right|_{Z=0}$ est évaluée à l'ordre 2 par un schéma aux différences finies décentré.

II. COEFFICIENTS DE TRAINEE ET DE PORTANCE

Les efforts exercés sur l'obstacle sont réduits par la force de référence :

$$\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \, . 2 r_o$$

A la paroi, la contrainte tangentielle, ou contrainte de viscosité, est exprimée à l'aide du rotationnel :

$$\vec{\tau}_t = \mu \, \omega_p \, . \, \vec{\theta}'$$

la contrainte normale est égale à la pression P_p déterminée précédemment. A l'aide des variables adimensionnelles, il vient :

$$C_{x_P} = - \frac{2}{Re} \int_0^{2\pi} P_p \cos\theta \, d\theta$$

$$C_{y_P} = - \frac{2}{Re} \int_0^{2\pi} P_p \sin\theta \, d\theta$$

$$C_{x_V} = \frac{2}{Re} \int_0^{2\pi} \omega_p \sin\theta$$

$$C_{y_V} = \frac{2}{Re} \int_0^{2\pi} \omega_p \cos\theta$$

et : $C_x = C_{x_P} + C_{x_V}$; $C_y = C_{y_P} + C_{y_V}$

avec :
- C_{x_P} : coefficient de traînée de pression
- C_{x_V} : coefficient de traînée de viscosité
- C_{y_P} : coefficient de portance de pression
- C_{y_V} : coefficient de portance de viscosité

Remarque : Les intégrales sont évaluées par la méthode des trapèzes.

ANNEXE III

DÉTERMINATION DU TOURBILLON À LA PAROI

FORMULE DE WOOD

La résolution des équations de Navier-Stokes à l'aide des variables de Helmholtz (fonction courant ψ, rotationnel ω) dans un écoulement où sont présentes des parois, exige la détermination du rotationnel sur celles-ci. L'évaluation de cette variable devra se faire avec la même précision qui est utilisée dans l'approximation des équations à l'intérieur du domaine.

Plusieurs formules ont été proposées. Nous allons démontrer la formule de Wood (ordre 2) que nous avons utilisée dans nos codes de calcul.

Soit un cylindre circulaire, animé d'une vitesse angulaire $U_{\theta p}$. Si la paroi est imperméable, nous avons :

$$Z = 0 \quad ; \quad E_Z = 1$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial Z} = U_{\theta p} \tag{III.0}$$

L'équation de Poisson (chap. I.1.5) devient :

$$\omega_{Z=0} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + U_{\theta p} \tag{III.1}$$

De plus, dans tout le domaine, l'équation (I.15) permet d'écrire :

$$\frac{\partial \omega}{\partial Z} = - \frac{2}{E_Z} \cdot \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}\right] + \frac{1}{E_Z} \cdot \left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}\right)\right]$$

qui se simplifie à la paroi (Z = 0) :

$$\left.\frac{\partial \omega}{\partial Z}\right|_{Z=0} = -2 \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3}\right|_{Z=0}$$

Soit, en utilisant la relation (III.1.) :

$$\left.\frac{\partial \omega}{\partial Z}\right|_{Z=0} = -2\,\omega_{Z=0} + 2U_{\theta p} + \left.\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3}\right|_{Z=0} \qquad \text{(III.2.)}$$

Développons la fonction $\left.\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3}\right|_{Z=0}$ en série de Taylor :
(voir fig.5, chap. IV pour les notations)

$$\psi_2 = \psi_1 + \delta Z \left.\frac{\partial \psi}{\partial Z}\right|_{Z=0} + \frac{\delta Z^2}{2} \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2}\right|_{Z=0} + \frac{\delta Z^2}{6} \left.\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3}\right|_{Z=0} + o(\delta Z^4)$$

Soit, en combinant avec les relations (III.0) et (III.1) :

$$\frac{\delta Z^3}{6} \left.\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3}\right| = (\psi_2 - \psi_1) - \delta Z . U_{\theta p} - \delta Z^2 (\omega_1 - U_{\theta p}) + o(\delta Z^4) \qquad \text{(III.3)}$$

Si l'on groupe les relations (III.2) et (III.3) et que l'on développe en série l'expression $\left.\frac{\partial \omega}{\partial Z}\right|_{Z=0}$, nous obtenons finalement :

$$\omega_1 = \frac{3}{1+\delta Z} \left[\frac{1}{\delta Z^2} (\psi_2 - \psi_1) - \frac{1}{6} \omega_2 + \frac{1}{3} \left(\delta Z + \frac{3}{2} - \frac{3}{\delta Z}\right) . U_{\theta p}\right] + o(\delta Z^2) \qquad \text{(III.4)}$$

L'expression (III.4) permet de lier la valeur du rotationnel à la paroi (ω_1) aux valeurs des fonctions courant et rotationnel (ψ_2, ω_2) de l'écoulement.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

A. ACRIVOS, D.D. SNOWDEN, A.S. GROVE, E.E. PETERSEN
The steady separated flow past a circular cylinder at large Reynolds numbers.
Journal of Fluid Mechanics, vol.21, part.4, 1965, pp.737-760

A. BAILLE
Lois de refoidissement des fils chauds aux faibles vitesses.
Bulletin E.D.F. série A, n°3, 1973

E. BERGER, R. WILLE
Periodic flow phenomena
Annual review of fluid mechanics, vol.4, 1972, pp.313-340

H. BOISSON
Etude spectrale du champ de vitesse de l'écoulement derrière un cylindre pour un nombre de Reynolds de $5{,}6.10^4$
Rapport IMFT, n° M3-23, Décembre 1978

H. BOISSON
Communication personnelle
(A publier)

P. BONTOUX, B. FORESTIER, B. ROUX
Analyse et optimisation d'une méthode de haute précision pour la résolution des équations de Navier-Stokes
Journal de Mécanique, vol.2, n°3, 1978, pp.291-316

P. BONTOUX, B. GILLY, B. ROUX
Résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires. Analyse de la stabilité du schéma ADI.
C.R.A.S. Paris, tome 286, série A, 349, 1978

M. BOURIOT, L.F. TSEN
Simulation numérique de la turbulence cisaillée.
13e colloque d'Aérodynamique Appliquée, Ecully, 1976

C. CAMICHEL, P. DUPIN, M. TEISSIE-SOLIER
Sur l'application de la loi de similitude aux périodes de formation des tourbillons alternés de Benard Karman
C.R.A.S. t.185, pp.1556, 1927

A.J. CHORIN
Numerical study of slightly viscous flow
Journal of Fluid Mechanics, vol.57, part.4, 1972, pp.785-796

J.B. CHRISTIANSEN, N.J. ZABUSKY
Instability, coalescence and fission of finite area vortex structures.
J. Fluid Mechanics, vol.61, part.2, 1973, pp.219-243

W.N. COLLINS, C.R. DENNIS
Flow pas an impulsing started circular cylinder
J. of Fluid Mechanics, vol.60, part.1, 1973, pp.105-127

M. COUTANCEAU, R. BOUARD
Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation
Part.1 : steady flow.
J. of Fluid Mechanics, vol.79, part.2, pp.231-256

M. COUTANCEAU, R. BOUARD
Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation
Part.2 : unsteady flow.
J. of Fluid Mechanics, vol.79, part.2, pp.257-272

M. COUTANCEAU, R. BOUARD
Sur la formation de tourbillons "secondaires" dans le sillage soumis à un départ impulsif.
C.R.A.S. Paris, tome 288, série B, p.45-48, 1979

S.N. CURLE, H.J. DAVIES
Modern fluid dynamics
vol.2, Van Nostrand Reinhold Company L.T.D.

M.E. DAVIES
A comparison of the wake structure of a stationary and oscillating bluff body, using conditionnal averaging technique
J. of Fluid Mechanics, vol.75, part.2, 1976, pp.209-231

S.C.R. DENNIS, J.D. HUDSON, N. SMITH
Steady laminar forced convection from a circular cylinder at low Reynolds numbers
The Physics of Fluids, vol.11, n°5, 1968, pp.933-940

S.C.R. DENNIS, G. CHANG
Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100
J. of Fluid Mechanics, vol.12, part.3, 1970, pp.471-489

S.K. DEY
Numerical solution of non linear implicit finite difference equations of flow problems by perturbated iterations.
Computational fluid dynamics. Lectures series 1978-4, VKI

H. DIMOPOULOS, T. HANRATTY
Velocity gradients at the wall for flow around a circular cylinder for Reynolds numbers between 60 and 360.
J. of Fluid Mechanics, vol.33, part.2, 1968, pp.303-319

J. DUPUY
Etude des champs aérodynamiques par les méthodes interférentielles
Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air
1939, n°150

E. DURAND
Solutions numériques des équations algébriques.
Tome II, Masson et Cie, 1971

A. DYMENT
Structure du sillage proche d'un obstacle en écoulement plan à grand Reynolds
Université de Lille, n°122, 1977

E.R.G. ECKERT, E. SOEHNGEN
Distribution of heat transfer coefficients around circular cylinders in cross-flow at Reynolds numbers from 20 to 500
Transactions of the ASME, 1952, pp.343-347

H. FARGUES
Etude de l'écoulement autour d'un cylindre et de son sillage à faible nombre de Reynolds
Thèse de 3e cycle, U.P.S. Toulouse, 1976

H. FASEL
Recent developments in the numerical solution of the Navier-Stokes equations and hydrodynamic stability problems.
Computational fluids dynamics. Lecture series 4-1978, VKI Bruxelles.

M. FENAIN
Méthodes de relaxation pour la résolution d'équations elliptiques dans les domaines de frontière quelconque.
Journal de Mécanique Appliquée, vol.1, n°1, 1977

G.E. FORSYTHE, W.R. WASSOW
Finite difference methods for partial differential equations.
John Wiley, New-York, 1960

J.E. FROMM, F.H. HARLOW
Numerical solution of the problem of vortex street development
The Physics of Fluids. Vol.6, n°7, 1963, pp.975-982

M. GASTER
Vortex shedding from circular cylinders at low Reynolds numbers.
J. of Fluid Mechanics, vol.46, part.4, 1971, pp.749-756

B. GEBHART, L. PERA
Mixed convection from long horizontal cylinders
J. of Fluid Mechanics, vol.45, part.1, 1970, pp.49-64

G. GONTIER
Contribution à l'étude de l'interféromètre à biprisme de Wollaston
Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air.
1957, n°338

G. GONTIER
Procédés optiques d'observation et de mesure dans les gaz en mouvement.
Techniques de l'Ingénieur, R2-160, pp.1-9

P.M. GRESHO, R.L. LEE, R.L. SANI, T.W. STULLICH
On the time-dependent FEN solution of the incompressible Navier-Stokes equations in two and three dimensions
Congrès de Swansea, 1978, (session spéciale).

A. HAMIELEC, J. RAAL
Numerical studies of viscous flow around circular cylinders
The Physics of Fluids, vol.12, n°1, 1969, pp.11-17

H. HA MINH
Décollement provoqué d'un écoulement turbulent incompressible.
Thèse d'Etat. I.N.P. Toulouse, 1976

H. HA MINH
Equations relatives à l'écoulement plan autour d'un cylindre en fluide incompressible.
Rapport interne, IMF Toulouse, M3-3, 1977

H. HA MINH
Application de la méthode implicite des directions alternées (A.D.I.) à la résolution des équations de Navier-Stokes autour d'un cercle.
Rapport Interne, IMF Toulouse, M3-4, 1977

H. HA MINH, G. MARTINEZ, H. BOISSON
Détermination de schémas aux différences finies pour un problème convection-diffusion en fonction du nombre de Péclet local.
Rapport Interne, IMF Toulouse, M3-14, Avril 1978

H. HA MINH, G. MARTINEZ
Steady laminar flow over a cylinder. Comparison problem 4.
Ed. par D.K. Garlin, Albuquerque New-Mexico, U.S.A.

F.H. HARLOW, J.E. FROMM
Dynamics and heat transfer in the Von Karman wake of a rectangular cylinder
The Physics of Fluids, vol.7, n°8, 1964

C.A. HIEBER, B. GEBHART
Low Reynolds number heat transfer from a circular cylinder.
J. of Fluid Mechanics, vol.32, part.1, 1968, pp.21-28

R.S. HIRSH
Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique.
J. of Computational Physics, vol.19, pp.90-109, 1975

D.B. INGHAM
Note on the numerical solution for unsteady viscous flow past a circular cylinder
J. of Fluid Mechanics, vol.31, part.4, 1968, pp.815-818

P. JAIN, K. RAO
Numerical solution of unsteady incompressible fluid flow past a circular cylinder.
The Physics of Fluids, supplément II, 1969, pp.57-64

P.C. JAIN, B.S. GOEL
A numerical study of unsteady laminar forced convection fromm a circular cylinder.
J. Heat Transfer, 1976, pp.303-307

D.R. JENG, M.H. LEE, K.J. DE WITT
Convective heat transfer through boundary layers with arbitrary pressure gradient and non isothermal surfaces
J. Heat Mass Transfer, vol.21, 1978, pp.499-509

S.K. JORDAN, J.E. FROMM
Oscillatory drag, lift, drag and torque on a circular cylinder in a uniform flow
The Physics of Fluids, vol.15, n°3, 1972, pp.371-376

K.A. KLIFFE, C.P. JACKSON, J. RAE, D.H. WINTERS
Finite element flow modelling using velocity and pressure variables.
AERE Harwell R9202, 1978

S. KOHAN, W.H. SCHARTZ
Low speed calibration formula for vortex shedding from cylinders
The Physics of Fluids, vol.16, n°9, 1973, pp.1528-1529

G.H. KOOPMANN
The vortex wakes of vibrating cylinders at low Reynolds numbers.
J. of Fluid Mechanics, vol.28, part.3, 1967, pp.501-512

L.S.G. KOVASZNAY
Hot-wire investigation of the wake behind cylinders at low Reynolds numbers.
Proceedings Roy. Soc. A198, 1949, pp.174-190

K.M. KRALL, E.R.G. ECKERT
Heat transfer to a traverse circular cylinder at low Reynolds numbers including rarefaction effects.
4e Intern. Heat Transfer Conf. Paris-Versailles, FC 7.5, 1970

C. LIN, D. PEPPER, S. LEE
Numerical methods for separated flow solutions around a circular cylinder
A.I.A.A. Journal, vol.14, n°7, 1976, pp.900-907

H.T. LUGT, S. OHRING
Rotating elliptic cylinders in a viscous fluid at rest or in a parallel stream
J. of Fluid Mechanics, vol.79, part.1, 1977, pp.127-156

A.W. MARRIS
A review on vortex streets, periodic wakes, and induced vibration phenomena.
ASME J. of Basic Engineering, June 1964, pp.185-196

G. MARTINEZ
Etude bibliographique sur les schémas aux différences finies. Application de la procédure à directions alternées (ADI)
Rapport Interne IMF Toulouse, M3-15, 1978

G. MARTINEZ
Transfert thermique autour d'un cylindre en régime visqueux instationnaire.
Accepté pour communication au 7e Congrès Canadien de Mécanique Appliquée, 1979

G. MARTINEZ, H. BOISSON
Etude comparative de codes pour la résolution des équations de Navier-Stokes
Accepté pour communication au 7e Congrès Canadien de Mécanique Appliquée, 1979

A.S. MONIN, A.M. YAGLOM
Statistical fluid mechanics : mechanics of turbulence.
Vol.1, John L. Lumley

M.V. MORKOVIN
Flow around circular cylinder. A kaleidoscope of challenging fluid phenomena.
A.S.M.E. Fluids Engineering Division Conference 1964

M. NISHIOKA, H. SATO
Measurement of velocity distributions in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers
J. of Fluid Mechanics, Vol.65, part.1, 1974, pp.97-112

M. NISHIOKA, H. SATO
Mechanism of determination of the shedding frequency of vortices behind a cylinder at low Reynolds numbers.
J. of Fluid Mechanics, vol.89, part.1, 1978, pp.49-60

S.A. ORSZAG, M. ISRAELI
Numerical simulation of viscous incompressible flows.
Annual review of Fluid Mechanics. Vol.6, 1974, pp.281-318

V. PATEL
Time dependent solution of the viscous incompressible flow past a circular bylinder by the method of series truncation
Computers and Fluids, vol.4, 1976, pp.13-27

D.W. PEACEMAN, H.H. RACHFORD
The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations.
J. Soc. Indust. Appl. Math. vol.3, n°1, 1955, pp.28-41

C.E. PEARSON
A computational method for viscous flow problems
J. of Fluid Mechanics, vol.21, part.4, 1965, pp.611-622

R. PEYRET
A hermitian finite-difference method for the solution of the Navier-Stokes equations. Numerical methods in laminar and turbulent flow
Ed. C. Taylor, K. Morgan, C.A. Brebbia, London, 1978

M. PHILBERT
Emploi de la strioscopie différentielle en aérodynamique.
La Recherche Aéronautique, n°65, 1958

A. ROSHKO
On the development of turbulent wakes from vortex streets.
N.A.C.A. Report 1191, 1954

A.K. RUNCHALL
Convergence and accuracy of the three finite difference schemes for a two-dimensional conduction and convection problem
Int. J. for Numerical Methods in Engineering, vol.4, 1972

J. SCHMITT
Contribution au calcul des efforts sur les structures immergées. Problèmes bidimensionnels
Thèse Docteur-Ingénieur, INP Grenoble, 1977

U. SHUMANN, G. GROTZBACH, L. KLEISER
Direct numerical simulation of turbulence
Prediction methods for turbulent flows, Lectures series 1979-2 V.K.I

J.S. SON, T.J. HANRATTY
Numerical solution for flow around a cylinder at Reynolds numbers of 40, 200 and 500
J. of Fluid Mechanics, vol.35, part.2, pp.369-386

P. SONNEVILLE
Etude de la structure tridimensionnelle des écoulements autour d'un cylindre circulaire.
Thèse d'Etat, Paris VI, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, E.D.F. n°3, série A, 1976

D.B. SPALDING
A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivates
Int. J. Num. Meth. Engineering, vol.4, 1972, pp.551-559

TA PHUOC LOC
Etude numérique de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'un cylindre fixe ou en rotation. Effet Magnus.
Journal de Mécanique, vol.14, n°1, 1975, pp.109-134

TA PHUOC LOC, O. DAUBE
Une méthode d'ordre $O(h^2)$ et $O(h^4)$ combinée pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes
CRAS Paris, 1977, tome 284, série A, pp.1241-1243

D. THOMAN, A. SZEWCZYK
Time dependent viscous flow over a circular cylinder
The Physics of Fluids, supplément II, 1969, pp.76-86

J.F. THOMPSON
Numerical solution of flow problems using body fitted coordinate systems.
Communication. Lectures series 1978-4, computational fluid VKI

D.J. TRITTON
A note on vortex streets behind circular cylinders at low Reynolds numbers
J. of Fluid Mechanics, vol.45, part.1, 1971, pp.203-208

E.L. WACHSPRESS
Iterative solution of elliptic systems
Prentice Hall, Ine, 1964

G.P. WILLIAMS
Numerical integration of the three dimensional Navier-Stokes equations for incompressible flow.
J. of Fluid Mechanics, vol.37, part.4, 1969, pp.727-750

W.W. WOOD
Calculations for anemometry with fine hot wires
J. of Fluid Mechanics, vol.32, part.1, 1968, pp.9-19

N.N. YANENKO
Méthodes à pas fractionnaires.
Traduit du russe par P.A. Nepomiastchy.
A. Colin, 1968

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE TOULOUSE

D E C I S I O N

Le Président de l'Institut National Polytechnique de TOULOUSE

VU les dispositions de l'article 11 de l'arrêté du 16 avril 1974 sur le DIPLOME DE DOCTEUR-INGENIEUR

VU le rapport de thèse établi par un des membres du jury

AUTORISE *Monsieur MARTINEZ Ginès*

à présenter une thèse en soutenance pour l'obtention du DIPLOME de DOCTEUR-INGENIEUR devant un jury composé de :

M. *NOUGARO, Professeur, Directeur de l'E.N.S.E.E.I.H.T.* — **Président**

M. *BOUSQUET, Ingénieur à la S.N.I.A.S.*
M. *GOLDSTEIN, Ingénieur à la C.E.N. Saclay*
M. *GRUAT, Professeur à l'I.N.P.T.*
M. *HA MINH, Chargé de recherche C.N.R.S.*
M. *TA PHUOC LOC, Chargé de recherche C.N.R.S.*

} **Membres**

A TOULOUSE, le *28 mai 1979*
Le Président de l'I.N.P.T.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE
MINISTÈRE DE L'UNIVERSITÉ

Professeur G. MONTEL